Álgebra



Intelectum
EVOLUCIÓN

Intelectum
Álgebra
IX

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica la base, el exponente y la potencia de una expresión exponencial.
- Reconoce términos semejantes, identificando exponentes y variables.
- Identifica monomios semejantes.
- Calcula resultados aplicando definiciones básicas sobre exponentes.
- Simplifica expresiones exponenciales aplicando propiedades.
- Reconoce la relación entre términos semejantes y calcula el valor numérico de estas.
- Evalúa propiedades de radicales homogéneos.
- Aplica las principales propiedades exponenciales con radicales para la resolución de problemas.
- Reconoce los distintos casos de ecuaciones exponenciales según sus soluciones.
- Calcula el valor de una variable dentro de una ecuación.
- Reconoce las clases de expresiones algebraicas: monomio y polinomio.
- Reconoce el grado absoluto y relativo de un monomio y de un polinomio.

Unidad 2

- Evalúa el desarrollo del binomio al cuadrado y el binomio al cubo e identifica la diferencia de cuadrados y las identidades de Legendre.
- Calcula el valor de expresiones algebraicas aplicando los diversos productos notables.
- Reconoce los elementos dentro de una división de polinomios.
- Discrimina entre el método de Horner y el teorema del resto, y analiza la teoría de divisibilidad para la división de polinomios.
- Efectúa la división de polinomios aplicando el método de Horner, el teorema del resto o criterios de divisibilidad.
- Evalúa los métodos de factorización de polinomios, agrupando términos o aplicando productos notables.
- Aplica el método del factor común, método de identidades o el método del aspa simple para la factorización de polinomios.
- Analiza las propiedades de la radicación, utilizando teoría de exponentes.
- Determina la homogenización de radicales utilizando teoría de exponentes.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

La factorización no es más que una agrupación, lo que busca es facilitar y reducir problemas complejos a través de, como su nombre lo indica, la factorización (reducción) de problemas grandes en pequeños.

En la vida cotidiana la mente funciona de la misma manera, por ejemplo agrupamos cuchillos, navajas, vidrios, y demás similares como objetos con los cuales podemos cortarnos, no tenemos que irnos cortando con cada uno de ellos.

Cuando memorizas un número telefónico largo, igual tiendes a agrupar según sea más fácil, en binas de números o tercias, eso es factorizar un problema grande en varios pequeños.

Cuando manejas un auto factorizas el arte de manejar en pequeñas cosas como acelerar, frenar, girar la guía, etc.

En fin, todo lo que se divide en pasos es una factorización del problema, no necesitan ser números.



Contenido:

Unidad 1

- Leyes de la teoría de exponentes I.
- Leyes de la teoría de exponentes II.
- Ecuaciones trascendentes.
- Expresiones algebraicas - Monomios.
- Polinomios.

Unidad 2

- Productos notables.
- División de polinomios.
- Factorización.
- Radicación.
- Racionalización.

Unidad 3

- Ecuaciones de primer grado. Planteo de ecuaciones.
- Sistema de ecuaciones lineales.
- Ecuaciones de segundo grado. Planteo de ecuaciones.
- Desigualdades e inecuaciones.

Unidad 4

- Valor absoluto.
- Logaritmos.
- Funciones.
- Progresiones.

Unidad 3

- Evalúa la naturaleza de la raíz o solución de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Utiliza procedimientos aritméticos para resolver ecuaciones de primer grado.
- Discrimina entre el método de sustitución, igualación y reducción para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Evalúa la utilización de matrices en los sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplica los distintos métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado (por factorización o fórmula general).
- Identifica variables dentro de un enunciado y las expresa utilizando teoría de ecuaciones.
- Identifica intervalos acotados y no acotados, intervalos abiertos y cerrados.
- Expresa gráficamente los diferentes tipos de intervalos.
- Determina el conjunto solución de las inecuaciones.

Unidad 4

- Analiza la aplicación del valor absoluto.
- Relaciona al valor absoluto con las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Aplica las definiciones de valor absoluto dentro de ecuaciones.
- Evalúa las diversas propiedades de logaritmos y su aplicación en problemas.
- Aplica la definición de logaritmos en las ecuaciones para calcular el valor de la incógnita.
- Discrimina entre relación y función.
- Identifica el dominio y el rango de una función expresada en pares ordenados.
- Reconoce y define las funciones especiales (función lineal o afín y función de proporcionalidad inversa y directa).
- Diferencia gráficamente una función de una relación utilizando diagramas de Venn.
- Identifica los elementos de una progresión aritmética y geométrica.







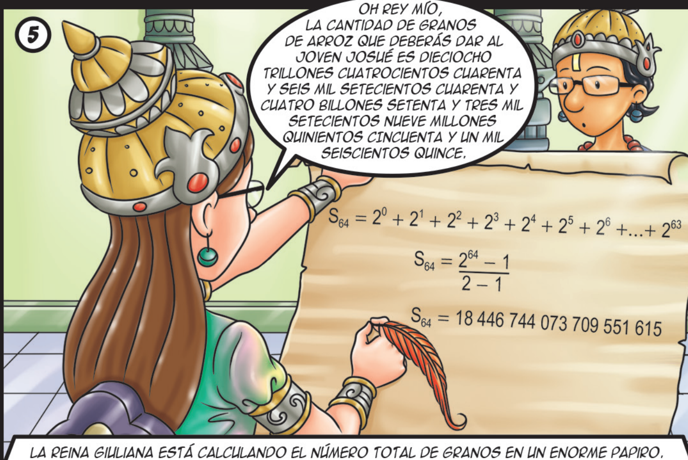
EL PRINCIPIO DEL AJEDREZ





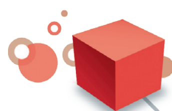












UNIDAD 1

LEYES DE LA TEORÍA DE EXPONENTES I

DEFINICIÓN

Son aquellas definiciones y teoremas que estudian a los exponentes a través de las operaciones de potenciación y radicación.

CONCEPTO DE POTENCIACIÓN

Operación matemática que consiste en hallar un número llamado potencia a partir de otros dos llamados base y exponente, según:

$$a^n = P \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } P \in \mathbb{R}$$

Donde: a: base; n: exponente; P: potencia



PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

1. De la expresión exponencial: a^n

Si el exponente (n) es un entero positivo ($\mathbb{Z}^+$) puedes escribir la expresión en forma expandida.

Ejemplos:

- $5^7 = 5\,.\,5\,.\,5\,.\,5\,.\,5\,.\,5\,.\,5$
- $(-7)^3 = (-7)(-7)(-7) = -343;\quad (-)^{impar} = (-)$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$
- $(-4)^2 = (-4)(-4) = 16;\quad (-)^{par} = (+)$

2. Producto de bases iguales: suma los exponentes.

$$a^m\,.\,a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

- $7^3\,.\,7^5 = 7^{3+5} = 7^8$
- $x^6\,.\,x^{15} = x^{6+15} = x^{21}$

3. Cociente de bases iguales: resta a los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

- $\frac{9^6}{9^3} = 9^{6-3} = 9^3$
- $\frac{(1,87)^{13}}{(1,87)^8} = (1,87)^{13-8} = (1,87)^5$

4. Exponente cero: es igual a uno.

$$a^0 = 1;\quad a \neq 0$$

Ejemplos:

- $Z^0 = 1$
- $(3x + 3^3y)^0 = 1$
- $10^0 = 1$
- $((5^6)^3)^0 = 1$

5. Exponente negativo: invierte la base.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\quad n \in \mathbb{Z}^+,\ a \neq 0$$

Ejemplos:

- $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$
- $8^{-6} = \frac{1}{8^6}$

6. Potencia de potencia: multiplica los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m\,.\,n}$$

Ejemplos:

- $(6^7)^8 = 6^{7\,.\,8} = 6^{56}$
- $(x^{-1})^2 = x^{(-1)\,.\,2} = x^{-2}$

7. Potencia de un producto: eleva cada factor a la potencia.

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Ejemplos:

- $(7\,.\,9)^4 = 7^4\,.\,9^4$
- $(x\,.\,y)^2 = x^2\,.\,y^2$

8. Potencia de un cociente: eleva tanto el numerador como el denominador a la potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

- $\left(\frac{2}{7}\right)^6 = \frac{2^6}{7^6}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

9. Exponentes sucesivos

La forma práctica de reducirlos es agrupándolos de dos en dos de arriba hacia abajo.

$$a^{b^{c^{d^e}}} = a^{b^{c^{d^e}}}\ (d^e = f) = a^{b^{c^f}}\ (c^f = g) = a^{b^g}\ (b^g = h) = a^h$$

¡Atención!

A la propiedad de los signos:

Multiplicación:	Potenciación:
$(+)\,.\,(+) = (+)$	$(+)^{par} = (+)$
$(+)\,.\,(-) = (-)$	$(+)^{impar} = (+)$
$(-)\,.\,(+) = (-)$	$(-)^{impar} = (-)$
$(-)\,.\,(-) = (+)$	$(-)^{par} = (+)$

División:

$\frac{(+)}{(+)} = (+)$ $\quad \frac{(-)}{(+)} = (-)$

$\frac{(+)}{(-)} = (-)$ $\quad \frac{(-)}{(-)} = (+)$

Nota

Aplicación:
potencia de potencia

$$(343)^7 = ?$$

Descomponemos en sus factores primos el número 343:

343	7
49	7
7	7
1	1

$\Rightarrow 343 = 7^3$

Luego:

$(343)^7 = (7^3)^7 = 7^{3\,.\,7} = 7^{21}$

$$\therefore (343)^7 = 7^{21}$$

Recuerda

$(a^m)^n \neq a^{m^n}$

Ejemplos:

$(3^2)^3 \neq 3^{2^3}$

$3^6 \neq 3^8$



Ejemplo de exponente sucesivo:

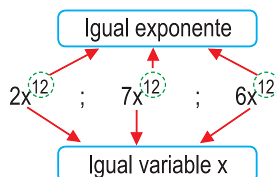
$7^{3^{4^{0^{9^{2^{-1}}}}}} = 7^{3^{4^{0^{9^{2^{-1}}}}}}$ → Por exponente negativo $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 7^{3^{4^{0^{9^{\frac{1}{2}}}}}}$ → Por potencia de potencia $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$ $\Rightarrow 7^{3^{4^{0^{3}}}}$ → El cero en cualquier exponente es cero: $0^3 = 0$

$\Rightarrow 7^{3^{4^{0}}}$ → Por exponente cero: $4^0 = 1$ $\Rightarrow 7^{3^{1}}$ → $3^1 = 3$ $= 7^3 = 343$

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos que tienen las mismas variables (x, y, z, etc.) afectadas del mismo exponente, no importa el coeficiente.

Ejemplo:



Operaciones con términos semejantes

Se pueden sumar o restar los términos semejantes de la siguiente manera:

- $2x^3x^4x^5 + 7x^6x^6 + 6x^{10}x^2 = 2x^{3+4+5} + 7x^{6+6} + 6x^{10+2}$

  $= \underbrace{2x^{12} + 7x^{12} + 6x^{12}}_{\text{Extraemos el factor común}}$

  $= (2 + 7 + 6)x^{12} = 15x^{12}$

  $\therefore \; 2x^3x^4x^5 + 7x^6x^6 + 6x^{10}x^2 = 15x^{12}$

- $2x^3x^7x - x^{10}x - 7x - x^7x^3 = 2x^{3+7+1} - x^{10+1} - 7x^{1+7+3}$

  $= \underbrace{2x^{11} - x^{11} - 7x^{11}}_{\text{Extraemos el factor común}}$

  $= (2 - 1 - 7)x^{11} = -6x^{11}$

  $\therefore \; 2x^3x^7x - x^{10}x - 7x - x^7x^3 = -6x^{11}$

- $3m + 7m - 2m = (3 + 7 - 2)m = 8m$
- $2z^2 + 3z^2 - z^2 = (2 + 3 - 1)z^2 = 4z^2$

EFECTUAR

Calcula el valor de los siguientes exponentes:

1. 7^1
2. 6^3
3. 8^2
4. 2^5
5. $\underbrace{x \, . \, x \, . \, x \, . \ldots . \, x}_{10 \text{ veces}}$
6. $\underbrace{x^2 \, . \, x^2 \, . \, x^2 \, . \ldots . \, x^2}_{15 \text{ veces}}$
7. $\underbrace{\sqrt{x} \, . \sqrt{x} \, . \sqrt{x} \, . \; \ldots \; . \sqrt{x}}_{20 \text{ veces}}$
8. $\underbrace{x^3 \, . \, x^3 \, . \, x^3 \, . \ldots . \, x^3}_{16 \text{ veces}}$
9. 8^{-2}
10. x^{-3}
11. 5^{-1}
12. 6^{-1}
13. $(a^2 + 3a)^0$
14. $(2012)^0$
15. $(16)^0 + (24)^0$
16. $(1001)^0 + (2001)^0$
17. $2^8 \, . \, 2^{10} \, . \, 2^3$
18. $5^{12} \, . \, 5^{-7} \, . \, 5^2$
19. $x^{-3} \, . \, x^4 \, . \, x^5$
20. $\dfrac{5^{10}}{5^7}$
21. $\dfrac{2^{27}}{2^{25}}$



Problemas resueltos

1 Efectúa:

$$M = 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4}$$

Resolución:

Por propiedad de exponente negativo:

$$M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$$

Operamos las fracciones:

$$M = \frac{3^3 + 3^2 + 3 + 1}{3^4} = \frac{27 + 9 + 4}{81} = \frac{40}{81}$$

Por lo tanto: $M = \frac{40}{81}$

2 Si: $A = 7^{4-n} . 7^{n-2}$ y $B = 7^{3n-1} . 7^{2-3n}$

Halla $\frac{A}{B}$

Resolución:

Usamos la propiedad de producto de bases iguales:

$A = 7^{4-n} . 7^{n-2} = 7^{4-n+n-2} = 7^2$

$B = 7^{3n-1} . 7^{2-3n} = 7^{3n-1+2-3n} = 7^1$

Nos piden: $\frac{A}{B} = \frac{7^2}{7^1}$

Por la propiedad de división de bases iguales:

$\frac{A}{B} = 7^{2-1} = 7^1 \quad \therefore \frac{A}{B} = 7$

3 La expresión: $2^{2^{3^2}}$, se asocia a:

(1) 2^{8^2} (2) 2^{2^9} (3) 2^{512} (4) 2^{12}

Resolución:

Tomamos de dos en dos de arriba hacia abajo:

$2^{2^{3^2}} = 2^{2^9}$ (equivalente a (2))

Otra secuencia de solución:

$2^{2^{3^2}} = 2^{2^9} = 2^{512}$ (equivalente a (3))

$\therefore$ Son ciertas (2) y (3)

4 Simplifica la expresión:

$$E = \left(\frac{x^{-2}y^5z^{-3}}{x^{-7}y^{-4}z}\right)^4$$

Resolución:

Por la propiedad de cociente de bases iguales:

$E = (x^{-2+7}y^{5+4}z^{-3-1})^4$

$E = (x^5y^9z^{-4})^4$

Empleamos: $(a^m)^n = a^{mn}$

$E = x^{5.4}y^{9.4}z^{-4.4} = x^{20}y^{36}z^{-16}$

Usamos: $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \therefore E = \frac{x^{20}y^{36}}{z^{16}}$

5 Determina el valor de S:

$$S = \frac{2^{x+3}(3x^{-1})^x}{6^x.x^{-x}}$$

Resolución:

Expresamos: $6 = 2 . 3$ y usamos: $(a^m)^n = a^{m.n}$

$$S = \frac{2^{x+3}.3^x.x^{-x}}{2^x.3^x.x^{-x}}$$

Usamos la propiedad de la división de bases iguales:

$S = 2^{x+3-x} = 2^3 = 8$

$\therefore S = 8$

6 Calcula:

$P = 4x^{m+1}x^{n-2} + 6x^{m-2}x^{n+1} + 6x^{m-3}x^{n+2}$

Resolución:

Usamos la propiedad de producto de bases iguales:

$4x^{m+1+n-2} + 6x^{m-2+n+1} + 6x^{m-3+n+2}$

$4x^{m+n-1} + 6x^{m+n-1} + 6x^{m+n-1}$

Reducimos términos semejantes:

$(4 + 6 + 6)x^{m+n-1} = 16x^{m+n-1}$

$\therefore P = 16x^{m+n-1}$

7 Si: $R = x^2 - 2x - 2$ y $S = x^2 + x - 5$

Determina: $R + S$ y $R - S$

Resolución:

Calculamos: $R + S$

$R + S = (x^2 - 2x - 2) + (x^2 + x - 5)$

Reducimos términos semejantes:

$R + S = (x^2 + x^2) + (x - 2x) - (2 + 5)$

$\therefore R + S = 2x^2 - x - 7$

Cálculo de $R - S$:

$R - S = (x^2 - 2x - 2) - (x^2 + x - 5)$

$R - S = x^2 - 2x - 2 - x^2 - x + 5$

$R - S = (x^2 - x^2) - (2x + x) - (2 - 5)$

Reducimos términos semejantes:

$R - S = 0 - 3x + 3$

$\therefore R - S = -3x + 3$

8 Reduce:

$$L = \frac{6^{n+4} - 6(6^n)}{6(6^{n+3})}$$

Resolución:

Usamos: $a^{m+n} = a^m . a^n$ y reducimos:

$$L = \frac{6^n.6^4 - 6.6^n}{6.6^n.6^3}$$

Extraemos: 6^n

$$L = \frac{6^n(6^4 - 6)}{6^n(6.6^3)} = \frac{6(6^3 - 1)}{6.6^3} = \frac{6^3 - 1}{6^3} \quad \therefore L = \frac{215}{216}$$

LEYES DE LA TEORÍA DE EXPONENTES II

Recuerda

Cuando n = 2 en $\sqrt[n]{a}$, en lugar de escribir $\sqrt[2]{a}$ escribimos $\sqrt{a}$.
Se lee: raíz cuadrada de a.
Se sobreentiende que el índice es 2.



Atención

Se puede hacer la simplificación directa del índice con el exponente de la base en el radicando:

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt[n]{5^{n(n+3)}} = 5^{n+3}$
- $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

No te olvides de las leyes de los signos:

$\sqrt[par]{(+)} = \binom{+}{-}$	$\sqrt[impar]{(+)} = (+)$
$\sqrt[impar]{(-)} = (-)$	$\sqrt[par]{(-)} =$ Cantidad imaginaria

Ejemplos:

- $\sqrt{4} = \pm 2$ (Por lo general se toma el valor con el signo positivo: +2)
- $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
- $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

CONCEPTO DE RADICACIÓN

Es una de las operaciones matemáticas inversas a la potenciación cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz (R), conociendo otras dos lla madas radicando $\mathbf{a^m}$ e índice **n**.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = R \quad ; \; n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq 2$$

Donde n: índice
$\sqrt{\ }$: radical
a^m: cantidad subradical

Se lee: La raíz enésima de "a" elevado a la "m" es igual a R.
Raíz de índice "n" elevado a la "m" es igual a R.

Exponente fraccionario

Significa sacar la raíz enésima de una catindad subradical. Veamos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos:

- $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $4^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$
- $5^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

PROPIEDADES

Producto de raíces con igual índice

Se considera solo el índice común y los radicandos se multiplican:

$$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{7} . \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7.2.5} = \sqrt[3]{70}$

Cociente de radicales homogéneos

Se considera el índice homogéneo y los radicandos se dividen:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

- $\frac{\sqrt[7]{8}}{\sqrt[7]{4}} = \sqrt[7]{\frac{8}{4}} = \sqrt[7]{2}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

Radical de radical

Solo los índices se multiplican:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{x}}} = \sqrt[a.b.c]{x} = x^{\frac{1}{abc}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2.2.2]{2} = \sqrt[8]{2}$
- $\sqrt[2]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[2.5]{7} = \sqrt[10]{7}$

Propiedad:

$$\sqrt[m]{a^n\sqrt[p]{a^q\sqrt[r]{a^s}}} = a^{\frac{(np+q)r+s}{mpr}}$$

Aplicación:

$$\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{2^5\sqrt{2^3}}} = 2^{\frac{(2(4)+5)2+3}{3(4)(2)}} = 2^{\frac{29}{24}}$$

SUMA O RESTA DE RADICALES

Se pueden sumar o restar aquellos que poseán igual índice y la misma cantidad subradical.

Ejemplo:

$$10\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \Rightarrow (10 + 8 + 4)\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$$

Igual índice (2). $\sqrt{3}$ Igual cantidad subradical (3).

Nota

Ten en cuenta:

Introducción de factores en un radical:

- $7\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{7^3.2}$

Potencia de un radical:

- $\sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$

Problemas resueltos

1 Halla: $M=\sqrt[n]{\dfrac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$

Resolución:

$$M=\sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}=\sqrt[n]{\frac{20^n.20}{4^n4^2+2^{2n}2^2}}$$

$$M=\sqrt[n]{\frac{20^n.20}{4^n(16)+4^n(4)}}=\sqrt[n]{\frac{20^n.20}{4^n(16+4)}}$$

$$M=\sqrt[n]{\frac{20^n}{4^n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{20}{4}\right)^n}\Rightarrow M=5$$

2 Calcula: $E=\dfrac{1}{16}^{-4^{-1}}+32^{5^{-1}}-27^{3^{-1}}$

Resolución:

$$E=\frac{1}{16}^{-4^{-1}}+32^{5^{-1}}-27^{3^{-1}}$$

Analizamos los exponentes:

$$-4^{-1}=-\frac{1}{4}\ ;\ 5^{-1}=\frac{1}{5};\ 3^{-1}=\frac{1}{3}$$

Reemplazamos:

$$E=\frac{1}{16}^{-\frac{1}{4}}+32^{\frac{1}{5}}-27^{\frac{1}{3}}$$

$$E=16^{\frac{1}{4}}+\sqrt[5]{32}-\sqrt[3]{27}$$

$$E=\sqrt[4]{16}+\sqrt[5]{32}-\sqrt[3]{27}=\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[5]{2^5}-\sqrt[3]{3^3}$$

$$E=2+2-3\Rightarrow E=1$$

3 Reduce: $M=\dfrac{\sqrt{b^{3+m}}\sqrt[3]{b^{2+m}}}{\sqrt[6]{b^{1-m}}}$

Resolución:

Por exponente fraccionario: $M=\dfrac{b^{\frac{3+m}{2}}.b^{\frac{2+m}{3}}}{b^{\frac{1-m}{6}}}$

Por multiplicación y división de bases iguales:

$$M=b^{\frac{3+m}{2}+\frac{2+m}{3}-\frac{1-m}{6}}$$

$$M=b^{\frac{9+3m+4+2m-1+m}{6}}$$

$$M=b^{\frac{12+6m}{6}}$$

$$M=b^{2+m}$$

4 Reduce:

$$S=\frac{\overbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}\ldots\sqrt{2}.\sqrt{2}}^{100\text{ veces}}}{\underbrace{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2}\ldots\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2}}_{120\text{ veces}}}$$

Resolución:

Por multiplicación de bases iguales:

$$S=\frac{\sqrt{2}^{100}}{\sqrt[3]{2}^{120}}=\frac{2^{50}}{2^{40}}$$

Por división de bases iguales:

$$S=2^{50-40}\Rightarrow S=2^{10}=1024$$

5 Simplifica:

$$R=\frac{\sqrt[4]{m^3n^5}\sqrt[5]{mn^2}}{\sqrt[20]{m^{19}n^{13}}}$$

Resolución:

Por exponente fraccionario:

$$R=\frac{m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{5}{4}}m^{\frac{1}{5}}n^{\frac{2}{5}}}{m^{\frac{19}{20}}n^{\frac{13}{20}}}$$

Por multiplicación y división de bases iguales:

$$R=m^{\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{19}{20}}.n^{\frac{5}{4}+\frac{2}{5}-\frac{13}{20}}$$

$$R=m^{\frac{15+4-19}{20}}.n^{\frac{25+8-13}{20}}$$

$$R=m^{\frac{0}{20}}.n^{\frac{20}{20}}=m^0.n^1$$

$$R=1.n\Rightarrow R=n$$

6 Halla E: $E=\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^4}}}}{\sqrt{x^{\frac{14}{18}}}}$

Resolución:

En el numerador, por propiedad:

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^4}}}=x^{\frac{(2.2+3)3+4}{3.2.3}}=x^{\frac{25}{18}}$$

En el denominador, por exponente fraccionario:

$$\sqrt{x^{\frac{14}{18}}}=x^{\frac{14}{18.2}}=x^{\frac{7}{18}}$$

Reemplamos en E:

$$E=\frac{x^{\frac{25}{18}}}{x^{\frac{7}{18}}}=x^{\frac{25}{18}-\frac{7}{18}}=x^{\frac{18}{18}}$$

$$\therefore\ E=x$$

7 Calcula el producto de los dígitos del valor de la expresión:

$$M=\sqrt[a-b]{\sqrt[b-c]{x}}\ \sqrt[b-c]{\sqrt[c-a]{x}}\ \sqrt[c-a]{\sqrt[a-b]{x}}$$

Resolución:

Por radical de radical y exponente fraccionario, obtenemos:

$$M=x^{\frac{1}{(a-b)(b-c)}}.x^{\frac{1}{(b-c)(c-a)}}.x^{\frac{1}{(c-a)(a-b)}}$$

Aplicamos producto de bases iguales y operamos:

$$M=x^{\frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}}=x^0=1$$

Nos piden el producto de los dígitos al valor de la expresión es 1, entonces:

$\therefore$ Producto de dígitos $=1$

ECUACIONES TRASCENDENTES

Atención

A las ecuaciones trascendentes también se les llama ecuaciones exponenciales.



Observación

Respecto a las analogías, se pueden presentar casos como:

- $x^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{\left(\frac{1}{a}\right)} \Rightarrow x = \frac{1}{a}$
- $x^{x+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\left(\frac{1}{a}\right)+1} \Rightarrow x = \frac{1}{a}$
- $x^{(x+1)^x} = a^{(a+1)^a} \Rightarrow x = a$

Practica con los ejemplos de aplicación de los tres casos:

Bases iguales:
$7^{x-15} = 7^8$
$x - 15 = 8$ (caso I)
$x = 23$

Analogías:
$(x-1)^{(x-1)} = 7^7$
$x - 1 = 7$
$x = 8$

Exponentes iguales:
$(x+5)^{20} = 10^{20}$
$x + 5 = 10$
$x = 5$

DEFINICIÓN

Son aquellas cuya incógnita figura en el exponente o en la base. Se estudian aquellos casos cuya solución es factible gracias a la utilización de las leyes de la teoría de exponentes.

CASOS

Primer caso: bases iguales

$$a^x = a^n \Rightarrow x = n$$, donde: $a \neq \{-1; 0; 1\}$

Segundo caso: analogía o semejanza

$$x^x = a^a \Rightarrow x = a$$, donde: $x, a \neq \{0; 1\}$

Tercer caso: exponentes iguales

$$x^a = y^a \Rightarrow x = y$$, donde: $a \neq \{0\}$

ECUACIONES LINEALES (ECUACIONES DE PRIMER GRADO)

En la secuencia de solución de los diferentes casos presentados, nos encontraremos con una ecuación de primer grado cuya solución es simple. Por ello ten en cuenta los casos y sus soluciones:

Caso I

Ecuación lineal de la forma:

$$ax \pm b = c$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{c \mp b}{a}$$

Ejemplo:

- $2x - 4 = 4$
  $x = \frac{4+4}{2}$
  $x = 4$
- $5x + 5 = 35$
  $x = \frac{35-5}{5}$
  $x = 6$
- $3n - 3 = 21$
  $n = \frac{21+3}{3}$
  $n = 8$

Caso II

Ecuación lineal de la forma:

$$ax \pm b = cx \pm d$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{\pm d \mp b}{a - c}$$

Ejemplos:

- $16x - 9 = 8x + 16$
  $x = \frac{16+9}{16-8}$
  $x = \frac{25}{8}$
- $12n - 22 = 6n + 8$
  $n = \frac{8+22}{12-6}$
  $n = 5$

EFECTUAR

Grupo I

1. $6^{x+2} = 6^{20}$
2. $8^{x-4} = 8^7$
3. $9^{x-7} = 9^{15}$
4. $10^{x+4} = 10^6$
5. $7^{x-15} = 7^8$
6. $a^{2x} = a^{20}$
7. $b^{2x-1} = b^7$
8. $N^{3x+1} = N^{25}$
9. $13^{2x-4} = 13^{20}$
10. $17^{3x-8} = 17^{22}$
11. $27^{x+14} = 27^{86}$
12. $2011^{4x-7} = 2011^{33}$

Grupo II

13. $(x+5)^{20} = 10^{20}$
14. $(2x-3)^7 = 17^7$
15. $(x-10)^{2011} = 8^{2011}$
16. $(3x+8)^{197} = 38^{197}$
17. $(6x+4)^n = 16^n$
18. $x^x = 5^5$
19. $x^x = 8^8$
20. $(x-1)^{x-1} = 7^7$
21. $(x+4)^{x+4} = 9^9$
22. $(2x-1)^{2x-1} = 27^{27}$

Problemas resueltos



1 Resuelve:
$(243)^{2x-5} = (729)^{x-4}$

Resolución:
Pasamos a bases iguales:
$(3^5)^{2x-5} = (3^6)^{x-4}$
$3^{10x-25} = 3^{6x-24}$

Entonces:
$10x - 25 = 6x - 24$
$4x = -24 + 25 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

2 Halla **n** en:
$\left[(\sqrt[3]{8})^{-2} + (\sqrt[3]{8})^{-3}\right]^{-\frac{1}{n}} = 2$

Resolución:
Aplicamos leyes de exponentes para llegar a bases iguales:
$\left[(\sqrt[3]{8})^{-2} + (\sqrt[3]{8})^{-3}\right]^{-\frac{1}{n}} = 2$
$\left[(2)^{-2} - (2)^{-3}\right]^{-\frac{1}{n}} = 2$
$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{n}} = 2$

$\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right]^{-\frac{1}{n}} = 2$
$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{n}} = 2$
$(2^3)^{\frac{1}{n}} = 2$

Por bases iguales:
$2^{\frac{3}{n}} = 2^1 \Rightarrow \frac{3}{n} = 1 \therefore n = 3$

3 Resuelve:
$(x+1)^{x+2} = 81$

Resolución:
Adaptamos la ecuación para resolverla por otro caso de semejanza:
$(x+1)^{x+2} = 81$
$(x+1)^{(x+1+1)} = 3^4$
$(x+1)^{(x+1+1)} = 3^{(3+1)}$

De donde:
$x + 1 = 3$
$\therefore x = 2$

4 Halla x:
$16^{32^{x-2}} = 2^{2^{x+4}}$

Resolución:
Llevamos a bases iguales:
$16^{32^{x-2}} = 2^{2^{x+4}}$
$2^{4.2^{5(x-2)}} = 2^{2^{x+4}}$

Entonces:
$2^2.2^{5x-10} = 2^{x+4}$
$2^{2+5x-10} = 2^{x+4}$

Por lo tanto:
$5x - 8 = x + 4 \quad \therefore x = 3$

5 Resuelve:
$7^{1+32^x} = 343$

Resolución:
Buscamos bases iguales:
$7^{1+32^x} = 343 \Rightarrow 7^{1+32^x} = 7^3$

Entonces:
$1 + 32^x = 3$
$32^x = 2 \Rightarrow 2^{5x} = 2$

Por lo tanto:
$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

6 Halla el valor de m en:
$\sqrt[5^m]{2^{5^{12-m}}} = 32^{5^{m+2}}$

Resolución:
Buscamos bases iguales:
$\sqrt[5^m]{2^{5^{12-m}}} = 32^{5^{m+2}} \Rightarrow 2^{\frac{5^{12-m}}{5^m}} = 2^{5.5^{m+2}}$

Bases iguales, se igualan los exponentes:
$\frac{5^{12-m}}{5^m} = 5^{m+2+1} \Rightarrow 5^{12-m-m} = 5^{m+3}$

De donde:
$12 - 2m = m + 3 \Rightarrow m = 3$

7 Halla n^3, si:
$n^{n+1} = \sqrt{0,125}$

Resolución:
Transformamos 0,125 a una fracción:
$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

Reemplazamos en la expresión:
$n^{n+1} = \sqrt{\frac{1}{8}}$
$n^{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
$n^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+1}$

Por un caso particular de semejanza, concluimos:
$n = \frac{1}{2}$

Nos piden:
$n^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore n^3 = \frac{1}{8}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS – MONOMIOS

Nota

Para la escritura algebraica: Se representará a las cantidades que no son conocidas (constantes) por las PRIMERAS LETRAS del alfabeto:

a, b, c, d, e ...

Se representarán a las cantidades que son desconocidas (variables) por las últimas letras del alfabeto:

... v, w, x, y, z

Para unir estas cantidades se emplean: SIGNOS DE OPERACIÓN de RELACIÓN y de AGRUPACIÓN.

Signos del álgebra:

- **SIGNOS DE OPERACIÓN**
  - $x + y$: x más y
  - $x - y$: x menos y
  - $x.y <> xy$: x multiplicamos por y o x por y
  - $x \div y <> \frac{x}{y}$: x dividido por y
  - x^y : x elevado a la y
  - $\sqrt[y]{x}$: la raíz y-ésima de x
- **SIGNOS DE RELACIÓN**
  - $=$: igual a
  - $>$: mayor que
  - $\geq$: mayor o igual que
  - $<$: menor que
  - $\leq$: menor o igual que

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

- ( ) : paréntesis
- { } : llaves
- [ ] : corchetes

Recuerda

- Si se menciona solo el GRADO de un monomio o polinomio este se sobreentiende que es el GRADO ABSOLUTO.
- GRADO se refiere al exponente de la variable más no al exponente de constantes.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Son expresiones matemáticas donde las variables y constantes están ligadas entre sí por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación en una cantidad limitada de veces.

Ejemplos:

- $3x^4 - 6x^2y + x$ Sí es expresión algebraica, porque tiene cantidad finita de términos.
- $2 + 3x + 5x^2 + ...$ No es expresión algebraica, porque tiene cantidad infinita de términos.

Clases de expresiones algebraicas: monomios y polinomios

MONOMIOS

Es una expresión algebraica que está constituida por una parte numérica (coeficiente) y una parte literal (variables gobernadas solo por las operaciones de multiplicación y potenciación de exponente natural).

Ejemplo:

- $-\sqrt{7}\,x^3y^2$ (Parte numérica: $-\sqrt{7}$; Parte literal: x^3y^2)
  1. **Parte literal:** está constituida por las letras o variables y sus exponentes:
     x^3y^2 — Exponentes: 3, 2; Variables: x, y
  2. **Parte numérica:** llamada coeficiente, es un número real (ℝ) que aparece multiplicando a las variables.
     $-\sqrt{7}\,x^3y^2$ (coeficiente: $-\sqrt{7}$)

Notación matemática de un monomio

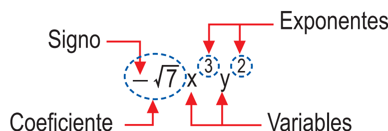
La característica fundamental de esta notación es el poder diferenciar las variables de las constantes así como de sus exponentes.

Ejemplo:

- $Z(x; y) = -\frac{\sqrt{7}}{a^2}x^3y^2z^3$
  - Variables: x e y (siempre son a los que estan en paréntesis)
  - Exponentes: 3 y 2
  - Constantes: $-\frac{\sqrt{7}}{a^2}$, z^3

Importante: los exponentes en un término algebraico son cualquier número. Los exponentes en un monomio son enteros y positivos ($\mathbb{Z}^+$)

Elementos de un monomio (término algebraico)



GRADO DE UN MONOMIO

Grado absoluto (GA)

Es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

Ejemplos:

- $Z(x; y) = -\frac{\sqrt{7}}{a^2}x^3y^2 \Rightarrow GA(Z) = 3 + 2 = 5$
- $A(x; y) = xya^3 \Rightarrow GA(A) = 1 + 1 = 2$
- $P(x; y; z) = \frac{1}{3}x^2y^{10}z^3 \Rightarrow GA(P) = 2 + 10 + 3 = 15$
- $R(m; n) = \frac{2}{49}m^2n^7 \Rightarrow GA(R) = 2 + 7 = 9$



Grado relativo (GR)
Es el exponente de la variable indicada.

Ejemplos:

- $A(x) = a^2x^7 \Rightarrow GR(x) = 7$
- $B(x\,;\,y) = (121)^2x^3y^{10}z^3 \Rightarrow GR(x) = 3\,;\, GR(y) = 10$
- $P(m\,;\,n) = 49m^6n^2 \Rightarrow GR(m) = 6;\ GR(n) = 2$

MONOMIOS SEMEJANTES (TÉRMINOS SEMEJANTES)
Son aquellos términos algebraicos que sin importar sus coeficientes poseen las mismas variables afectadas del mismo exponente (misma parte literal).

Ejemplos:

- $\frac{1}{3}x^3y^2$, $-2x^3y^2$, $5x^3y^2$ } Tienen igual variable **x** con exponente 3: x^3; Tienen igual variable **y** con exponente 2: y^2 $\therefore$ $\frac{1}{3}x^3y^2;\ -2x^3y^2;\ 5x^3y^2$ Son términos semejantes

- $5x^3y^4$, $-5x^4y^3$ } Tienen igual variable **x** con diferentes exponentes: x^3, x^4; Tienen igual variable **y,** pero con diferentes exponentes: y^4, y^3 $\therefore$ $5x^3y^4;\ -5x^4y^3$ No son términos semejantes

Atención

- El grado de una constante siempre es cero.
  Ejemplo:
  $A(x) = 7^4 \Rightarrow GA(A) = 0$
- El grado del número cero, siempre es indefinido.
  Ejemplo:
  $B(x) = 0 \Rightarrow GA(B)$ es no definido.



Operaciones con monomios semejantes
Se suman y restan los términos semejantes.

Suma:

Caso general:

- $ax^m + bx^m = (a + b)x^m$
- $ax^my^n + bx^my^n + cx^my^n = (a + b + c)x^my^n$

Ejemplos:

- $2x^3 + 21x^3 = (5 + 21)x^3 = 26x^3$
- $7x^2y + 3x^2y + x^2y = (7 + 3 + 1)x^2y = 11x^2y$

Resta:

Caso general:

- $ax^m - bx^m = (a - b)x^m$
- $-ax^n + bx^n = (b - a)x^n$
- $ax^my^n - bx^my^n - cx^my^n = (a - b - c)x^my^n$

Ejemplos:

- $5x^3 - 21x^3 = (5 - 21)x^3 = -16x^3$
- $-5x^3 + 21x^3 = (21 - 5)x^3 = 16x^3$
- $7x^2y - 3x^2y - x^2y = (7 - 3 - 1)x^2y = 3x^2y$

Recuerda

Si los monomios no son semejantes se obtiene un polinomio:
$3x^7y^3 + x^6z$

VALOR NUMÉRICO (VN) DE UN MONOMIO
Es un número que se obtiene cuando se sustituye las variables del monomio por valores numéricos dados arbitrariamente realizando en estas, las operaciones indicadas.

Ejemplo:
Halla el valor numérico (VN) de: $P(x;\,y) = -\sqrt{7}\,x^3y^2$ para: $x = 2;\ y = \sqrt[4]{7}$.

Resolución:
Reemplazamos los valores de las variables en el monomio:
$VN(P) = P(2;\ \sqrt[4]{7}) = -\sqrt{7}\,(2)^3(\sqrt[4]{7})^2 = -\sqrt{7}\,(8)(\sqrt{7}) = -7 \,.\, 8 = -56$
$\therefore VN(P) = -56$



Problemas resueltos

1 Si: a = 2; b = 3 y c = 4

Determina el valor numérico del monomio para:

x = 3; y = 2; z = 1

$H(x; y; z) = \frac{1}{6}x^a y^b z^c$

Resolución:

El monomio se puede escribir como:

$H(x; y; z) = \frac{1}{6}x^2 y^3 z^4$

Luego, reemplazamos los valores respectivos para sus variables:

$H(3; 2; 1) = \frac{1}{6}(3)^2(2)^3(1)^4 = \frac{3^2 . 2^3}{3 . 2} = 3^{2-1}\,2^{3-1} = 3 . 2^2$

$\therefore$ VN(H) = H(3; 2; 1) = 12

2 Determina el coeficiente del monomio:

$K(x; y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} x^{3n-5} y^{m+5}$

Si el grado relativo respecto a **x** es 1.

Resolución:

El grado relativo respecto a **x** del monomio es (3n – 5) y este por dato del problema es igual a 1. Luego:

$3n - 5 = 1$

$3n = 6 \Rightarrow n = 2$

El coeficiente del monomio está dado por:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

Entonces el monomio estará expresado como:

$K(x; y) = \underbrace{4}_{\text{Coeficiente}} x y^{m+5}$

$\therefore$ Coeficiente del monomio es 4.

3 Halla m si el monomio es de quinto grado.

$M = x^2 x^{2m} x^{3m}$

Resolución:

$M = x^2 x^{2m} x^{3m} = x^{2+5m}$

Del dato:

$2 + 5m = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{5}$

4 Si: $P(x; y) = 7x^5 y^8$

Calcula:

$E = \frac{GR(x) + GA(P)}{GR(y) - GR(x)}$

Resolución:

GR(x) = 5, GR(y) = 8

$\Rightarrow$ GA(P) = 13

$E = \frac{5 + 13}{8 - 5} = \frac{18}{3} \qquad \therefore\ E = 6$

5 El grado absoluto del siguiente monomio: $N(x; y) = 4x^{a-8}y^3$ es 13. Determina el valor de a.

Resolución:

GA(N) = a – 8 + 3; que por dato es 13.

$\Rightarrow a - 8 + 3 = 13$

$a - 5 = 13$

$\therefore\ a = 18$

6 Determina GR(x) + GA(P) ; si:

$P(x; y; z) = 7x^m y^{7-m} z^4$; además GR(y) = 3

Resolución:

Si GR(y) = 3 $\Rightarrow$ 7 – m = 3

m = 4 = GR(x)

GA(P) = m + 7 – m + 4 = 11

$\therefore$ GR(x) + GA(P) = 4 + 11 = 15

7 Reduce la siguiente expresión:

$A = x(1 - x + y) - y(x + 1 - y) - (y^2 - x^2)$

Resolución:

$A = x - x^2 + xy - yx - y + y^2 - y^2 + x^2$

Agrupamos términos semejantes:

$A = x + (-x^2 + x^2) + (xy - yx) - y + (y^2 - y^2)$

$A = x + (0) + (0) - y + (0)$

$A = x - y$

8 Halla el valor de N.

$N = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Resolución:

$N = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

Agrupamos:

$N = a^3 + (-a^2b + a^2b) + (ab^2 - ab^2) + b^3$

$N = a^3 + 0 + 0 + b^3$

$N = a^3 + b^3$

9 Efectúa:

$Q = \frac{2(a + b) + 3(a - b) + 4(a + b) - 9(a - b)}{5(a - b) - 4a + 5b - a + 6b}$

Resolución:

$Q = \frac{2a + 2b + 3a - 3b + 4a + 4b - 9a + 9b}{5a - 5b - 4a + 5b - a + 6b}$

Agrupamos:

$Q = \frac{(2a + 3a + 4a - 9a) + (2b - 3b + 4b + 9b)}{(5a - 4a - a) + (-5b + 5b + 6b)}$

$Q = \frac{0 + 12b}{0 + 6b}$

$Q = 2$

10 Reduce la siguiente expresión:
$M = 2x(3 + y) + 3y(2 - x) - 6(x - y) + xy$

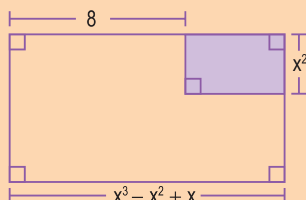
Resolución:
Operamos:
$M = 6x + 2xy + 6y - 3xy - 6x + 6y + xy$

Agrupando convenientemente:
$M = (6x - 6x) + (2xy - 3xy + xy) + (6y + 6y)$
$M = 0 + 0 + 12y$
$M = 12y$

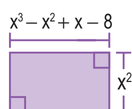
11 Halla M.
$M = 3xy + 4xy - 5xz - 6xz - 7xy + 10xz$

Resolución:
Agrupamos términos semejantes:
$M = (3xy + 4xy - 7xy) + (-5xz - 6xz + 10xz)$
$M = (0) + (-xz)$
$M = -xz$

12 Determina una expresión para el perímetro de la figura sombreada:



Resolución:



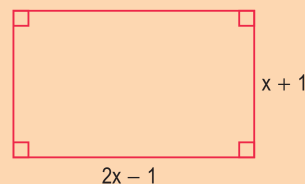
⇒ Sumando los lados: el perímetro $= 2(x^3 - x^2 + x - 8) + 2x^2$
$= 2x^3 + 2x - 16$

13 Calcula A.
$A = (x - 2y)^2 - x^2 - y^2 - 3y^2 + 3xy$

Resolución:
$A = (x - 2y)(x - 2y) - x^2 - y^2 - 3y^2 + 3xy$
$A = x^2 - 2xy - 2xy + 4y^2 - x^2 - y^2 - 3y^2 + 3xy$

Por términos semejantes:
$A = (x^2 - x^2) + (-2xy - 2yx + 3xy) + (4y^2 - y^2 - 3y^2)$
$A = 0 + (-xy) + 0$
$A = -xy$

14 Halla el área del rectángulo.



Resolución:
Por fórmula del área del rectángulo se tiene:
$A = \text{largo} \times \text{ancho}$
$A = (2x - 1)(x + 1)$
$A = 2x^2 + 2x - x - 1$
$A = 2x^2 + x - 1$

15 Calcula E.
$E = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (-32 + x^3)$

Resolución:
$E = x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27 + 32 - x^3$
$E = (x^3 - x^3) + (3x^2 - 3x^2) + (9x - 9x) + 5$
$E = 0 + 0 + 0 + 5$
$E = 5$

16 Efectúa:
$S = -x + 2x - 3x + 4x - 5x + 6x - ... + 40x$

Resolución:
$S = (-x - 3x - ... - 39x) + (2x + 4x + ... + 40x)$
$S = -x(1 + 3 + ... + 39) + x(2 + 4 + ... + 40)$
$S = -x((20)^2) + x((20)(21))$
$S = -400x + 420x$
$S = 20x$

17 Halla el valor de la siguiente expresión:
$$N = \frac{5m - \left[4m - (3m + n) + 2n\right] - 3n}{2(m - n)}$$

Resolución:
$$N = \frac{5m - 4m + 3m + n - 2n - 3n}{2m - 2n}$$
$$N = \frac{4m - 4n}{2m - 2n} = \frac{4(m - n)}{2(m - n)}$$
$N = 2$

POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Es una expresión algebraica formada por más de un monomio, cuyas variables poseen exponentes enteros no negativos.

Ejemplos:

$P(x; y) = 3x^2y^3 + x^4y^2 + x^3y^3$ $\qquad$ $P(x; y; z) = 3xy^2 + y^2z^3 + 120$

NOTACIÓN MATEMÁTICA DE UN POLINOMIO

Permite representar a una expresión matemática a través del cual identificamos variables, exponentes y coeficientes.

Veamos:

$P(x; y) = ax^2 + 2x^3y^3 - \frac{b}{2}xy$

- Variables: x e y (siempre están entre paréntesis)
- Exponentes: 2; 3; 3; 1; 1
- Constantes (coeficientes): a; 2; $-\frac{b}{2}$

Atención:

Ten en cuenta las propiedades del grado absoluto:

1. Si: $P(x) = (ax^m + b)(cx^n + d)$
   $\Rightarrow$ $GA(P) = m + n$
2. Si: $T(x) = \frac{7x^m + 8}{9x^n + 10}$
   $\Rightarrow$ $GA(T) = m - n$
3. Si: $A(x) = (4x^m + 100)^n$
   $\Rightarrow$ $GA(A) = mn$
4. Si: $R(x) = \sqrt[m]{5x^n + 6}$
   $\Rightarrow$ $GA(R) = \frac{n}{m}$



GRADO DE UN POLINOMIO

Grado absoluto (GA)

Es el mayor de los GA de los monomios que conforman el polinomio.

Ejemplo:

$P(x; y) = \underbrace{24x^{10}y^2}_{GA = 12} + \underbrace{\frac{3}{4}x^5y^5}_{GA = 10} - \underbrace{\sqrt{7}\,x^3y^4}_{GA = 7}$

Escogemos el mayor grado, entonces: $GAP(x; y) = 12$

Grado relativo (GR)

Es representado por el valor del mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplos:

$P(x; y) = 24x^{10}y^2 + \frac{3}{4}x^5y^5 - \sqrt{7}\,x^3y^4 \Rightarrow GR(x) = 10$ y $GR(y) = 5$

$Q(x; y; z) = 5x^8y^{20}z^{12} - 8x^8y^{21}x^{11} + x^9yz^4 \Rightarrow GR(x) = 9;\ GR(y) = 21$ y $GR(z) = 12$

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Es el resultado definido que se obtiene al sustituir las variables por un número cualquiera, realizando las operaciones indicadas previamente.

Ejemplo:

Si: $P(x) = x^3 + 3x + 1$

Halla:

$P(0) = (0)^3 + 3(0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$

$P(1) = (1)^3 + 3(1) + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

$P(b) = (b)^3 + 3(b) + 1 = b^3 + 3b + 1$

$P(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 1 = -1 - 3 + 1 = -3$

CAMBIO DE VARIABLE DE UN POLINOMIO

Consiste en reemplazar la variable de un polinomio por una nueva variable.

Ejemplos:

1. Si: $T(x) = 7x + 1$, halla: $T(7a)$, $T(a + 2)$, $T(x^2 + 1)$ y $T(6a - 1)$

   $T(7a) = 7(7a) + 1 = 49a + 1$
   $T(a + 2) = 7(a + 2) + 1 = 7a + 14 + 1 = 7a + 15$
   $T(x^2 + 1) = 7(x^2 + 1) + 1 = 7x^2 + 7 + 1 = 7x^2 + 8$
   $T(6a - 1) = 7(6a - 1) + 1 = 42a - 7 + 1 = 42a - 6$



2. Si: $A(x + 3) = x - 7$, calcula: $A(2)$

1.ª forma:

$A(x + 3) = x - 7$

Se busca: $x + 3$ en el 2.° miembro:

$A(x + 3) = (x + 3) - 3 - 7$

Entonces: $A(x) = x - 10$

Luego: $A(2) = 2 - 10$

$\therefore A(2) = -8$

2.ª forma:

Hacemos $x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$

Reemplazando tenemos:

$A(2) = (-1) - 7$

$\therefore A(2) = -8$



Observación

Si en el ejemplo nos pidieran: $A(x + 2)$

Entonces:

$x + 3 = x + 2$

$x = x + 2 - 3$

$x = x - 1$

Es como la 2ª. forma, se despeja la variable del primer miembro:

$A(x + 3) = A(x + 2) = (x - 1) - 7$

$\therefore A(x + 2) = x - 8$

VALORES NUMÉRICOS NOTABLES

Suma de coeficientes: $\sum$coef.

Se obtiene reemplazando las variables por la unidad.
Sea el polinomio:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$
Si: $x = 1$

$$\sum coef.(P) = P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$$

Ejemplos:

- $P(x) = 6x^4 + 7x^3 + 3x - 1$
  $\Rightarrow \sum coef.(P) = P(1) = 6(1)^4 + 7(1)^3 + 3(1) - 1 = 15$
- $T(x) = (3x - 1)^{10} + x - 1$
  $\Rightarrow \sum coef.(T) = T(1) = (3(1) - 1)^{10} + 1 - 1 = 1024$

Término independiente: TI

Se obtiene reemplazando las variables por ceros.
Sea el polinomio:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$
Si: $x = 0$

$$TI(P) = P(0) = a_0$$

Ejemplos:

- $P(x) = 6x^4 + 7x^3 + 3x - 1$
  $\Rightarrow TI(P) = P(0) = 6(0)^4 + 7(0)^3 + 3(0) - 1 = -1$
- $T(x) = (3x - 1)^{10} + x - 1$
  $\Rightarrow TI(T) = T(0) = (3(0) - 1)^{10} + 0 - 1 = 0$

Ejemplo:
Del siguiente polinomio:
$M(x) = (2x - 1)^{20} + 5x - 1$
Halla el termino independiente, la suma de coeficientes y el grado absoluto del polinomio.

Resolución:
Hallamos el término independiente:
$M(0) = [2(0) - 1]^{20} + 5(0) - 1$
$M(0) = (-1)^{20} + 0 - 1 = 1 + 0 - 1$
$\Rightarrow M(0) = 1 + 0 - 1 = 0$
La suma de coeficientes es:
$\sum coef.(M) = M(1) = [2(1) - 1]^{20} + 5(1) - 1$
$\sum coef.(M) = M(1) = (1)^{20} + 5 - 1$
$\Rightarrow \sum coef.M = 5$

Ahora hallamos el grado absoluto de M(x):
No es necesario desarrollar el polinomio, por propiedad del grado absoluto tenemos:
$GA(M(x)) = 20$ (mayor exponente de la variable)

Nota

Del polinomio P(x):
a_n: coeficiente principal, es el coeficiente de la variable con mayor exponente.

EFECTUAR

Grupo I

Halla el grado absoluto y los grados relativos en cada caso:

1. $M(x) = 6x^5$
2. $M(x) = \frac{2}{3}x^{n+1}$
3. $M(x; y) = 8x^{10}y^5$
4. $M(x; y) = -18x^3y^{16}$
5. $M(x; y; z) = 9x^5y^4z^{18}$
6. $M(x; y; z) = 14x^6y^9z$
7. $M(x; y) = 2x^{n-1}y^{n+1}$
8. $P(x; y) = 8x^6y^7 - 3x^5y^9 + xy^{11}$
9. $P(x; y) = 10x^9y^9 + 2x^{10}y^8 - x^{13}y^5$
10. $P(x; y) = xy + x^3y - y^4$

Grupo II

11. Si: $P(x) = x^2 - x + 1$
    Halla: P(7)
12. Si: $P(x) = x^2 - x + 10$
    Halla: P(8)
13. Si: $P(x) = x^2 + 3x + 1$
    Halla: P(2)
14. Si: $P(x) = x^3 + x^2 + x$
    Halla: P(3)
15. Si: $P(x) = 3x + 2$
    Halla: $P(x + 2)$
16. Si: $P(x) = 4x + 5$
    Halla: $P(x + 3)$
17. Si: $P(x) = 6x - 2$
    Halla: $P(x + 4)$
18. Halla la suma de coeficientes de los polinomios dados a continuación:
    $P(x) = 8x^2 + 7x + 1$
    $P(x) = 10x^3 + 8x^2 - 7x + 12$
    $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 2$
19. Halla el término independiente de:
    $P(x) = nx^2 + (n + 2)x + 12$
20. Si: $P(x) = 9x - 10$
    Halla: $P(x + 3)$

Problemas resueltos

1 Si los términos del siguiente polinomio son semejantes:
$T(x; y) = (b^a(b - a) + 1)x^{a^2+1}y^{b+4} + (b^2(a - b) - 17)x^{2(3a-4)}y^{2\sqrt{7b}-3}$
Calcula la suma de sus coeficientes.

Resolución:
Por ser términos semejantes, igualamos los exponentes de las variables "x" e "y" respectivamente:

$a^2 + 1 = 2(3a - 4)$
$a^2 + 1 = 6a - 8$
$a^2 - 6a + 9 = 0$
$(a - 3)^2 = 0^2$
$a - 3 = 0$
$a = 3$

$b + 4 = 2\sqrt{7b} - 3$
$(b + 7)^2 = (2\sqrt{7b})^2$
$b^2 + 14b + 49 = 4(7b)$
$b^2 - 14b + 49 = 0$
$(b - 7)^2 = 0^2$
$b - 7 = 0$
$b = 7$

La suma de coeficientes lo expresamos como sigue:
$\sum coef.(T) = T(1; 1) = (b^a(b - a) + 1) + (b^2(a - b) - 17)$

Reemplazamos los valores de a y b:
$\sum coef. = 7^3(7 - 3) + 1 + 7^2(3 - 7) - 17$
$= 343(4) - 16 + 49(-4)$
$= 1372 - 16 - 196$
$\therefore \sum coef.(T) = 1160$

2 Si: $P(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

Calcula: $\sqrt{P(4) + 1}$

Resolución:
Hallamos P(4):
$P(4) = \dfrac{2(4) + 1}{3} \Rightarrow P(4) = 3$

Nos piden:
$\sqrt{P(4) + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2$

3 Si: $P(x + 2) = 2(x + 2)^3 + x^2 + 4x + 4$
Calcula: P(3)

Resolución:
Haciendo: $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

Luego, reemplazamos:
$P(1 + 2) = 2(1 + 2)^3 + (1)^2 + 4(1) + 4$
$P(3) = 2(3)^3 + 1 + 4 + 4$
$P(3) = 2 \times 27 + 9$
$\therefore P(3) = 63$

4 Si $P(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}; x \neq 2$
Halla: P(P(x))

Resolución:
Reemplazamos:
$P(P(x)) = P\left(\dfrac{2x - 1}{x - 2}\right)$

Ahora reemplazamos $\dfrac{2x - 1}{x - 2}$ en P(x) y operamos:

$$\underbrace{P\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)}_{P(x)} = \dfrac{2\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) - 1}{\dfrac{2x-1}{x-2} - 2} = \dfrac{\dfrac{4x-2-x+2}{x-2}}{\dfrac{2x-1-2x+4}{x-2}} = \dfrac{3x}{3} = x$$

Por lo tanto: $P(P(x)) = x$

5 Dado: $P(x) = 3^m(x + 3) - 5$
Calcula m para que el término independiente sea 22.

Resolución:
$P(x) = 3^m(x + 3) - 5$

Dato:
$TI(P) = P(0) = 22$

Luego:
$P(0) = 3^m(0 + 3) - 5 = 22$
$3^m . 3 = 27$
$3^{m+1} = 3^3$
$\Rightarrow m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$

6 Si: $P(x; y) = 2x^9y - 7x^2y^9 + x^8y^3$
Calcula: GR(x) + GR(y)

Resolución:
Para hallar el grado relativo tomamos el mayor exponente de las variables x e y del polinomio, entonces:
$GR(x) = 9 \wedge GR(y) = 9$

Piden: $GR(x) + GR(y) = 9 + 9 = 18$

7 Dado el polinomio: $P(x; y) = x^{a-2}y^{2a} + 7x^{2-a}y^{4a+1}$
Se tiene GR(y) = 9, calcula el grado absoluto de P(x; y).

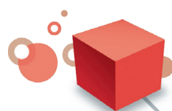
Resolución:
Comparando los exponentes de la variable **y** tenemos:
$2a < 4a + 1 \Rightarrow GR(y) = 4a + 1$
Luego:
$4a + 1 = 9$, de donde: $a = 2$
Para el grado absoluto comparamos los grados absolutos de cada término:

$\left.\begin{array}{l} a - 2 + 2a = 3a - 2 \\ 2 - a + 4a + 1 = 3a + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow GA(P) = 3a + 3 = 3(2) + 3 = 9$

$\therefore GA(P) = 9$

9 Si el polinomio Q se reduce a un solo término, halla: m + n
$Q(x; y) = x^{m-1}y^6 + x^3y^{n-1}$

Resolución
Del dato, el polinomio se reduce a un solo término, entonces los exponentes son iguales, asi:
$m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4$
$n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$
Nos piden: $m + n = 11$



UNIDAD 2

PRODUCTOS NOTABLES

CONCEPTO

Son aquellos productos que se pueden determinar directamente, sin necesidad de efectuar la operación de la multiplicación.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Binomio al cuadrado

Binomio suma al cuadrado:

$$(a+b)^2 \equiv \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Binomio diferencia al cuadrado:

$$(a-b)^2 \equiv \underbrace{a^2-2ab+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Ejemplos:

1. Desarrolla: $(2x+3y)^2$

Resolución:

Identificamos los términos de la expresión general:

$$(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{3y}_{b})^2 = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} + \underbrace{2(2x)(3y)}_{2ab} + \underbrace{(3y)^2}_{b^2}$$

Aplicamos potencia de potencia a los términos $(2x)^2$ y $(3y)^2$ del segundo miembro:

$$(2x+3y)^2 = 2^2x^2 + 2(2)(3)xy + 3^2y^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

2. Desarrolla: $(4x-3y)^2$

Resolución:

Similar al ejemplo anterior, solo hay que tener en cuenta el signo negativo:

$$(\underbrace{4x}_{a}-\underbrace{3y}_{b})^2 = \underbrace{(4x)^2}_{a^2} - \underbrace{2(4x)(3y)}_{2ab} + \underbrace{(3y)^2}_{b^2}$$
$$= 4^2x^2 - 2(4)(3)xy + 3^2y^2$$
$$= 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

2. Identidades de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos:

1. Desarrolla: $(x+7n)^2 + (x-7n)^2$

Resolución:

Identificamos términos:

$$(\underbrace{x}_{a}+\underbrace{7n}_{b})^2 + (\underbrace{x}_{a}-\underbrace{7n}_{b})^2 = 2(\underbrace{(x)^2}_{a^2}+\underbrace{(7n)^2}_{b^2})$$
$$= 2(x^2+7^2n^2) = 2(x^2+49n^2)$$

2. Desarrolla: $(5x+9y)^2 - (5x-9y)^2$

Resolución:

$$(\underbrace{5x}_{a}+\underbrace{9y}_{b})^2 - (\underbrace{5x}_{a}-\underbrace{9y}_{b})^2 = 4\,.\,\underbrace{5x}_{a}\,.\,\underbrace{9y}_{b}$$
$$= 4(5)(9)xy = 180xy$$

3. Binomio suma por binomio diferencia (diferencia de cuadrados)

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

Ejemplo:

1. Desarrolla: $(x^3+1)(x^3-1)$

Resolución:

Identificamos términos:

$$(\underbrace{x^3}_{a}+\underbrace{1}_{b})(\underbrace{x^3}_{a}-\underbrace{1}_{b}) = \underbrace{(x^3)^2}_{a^2} - \underbrace{1^2}_{b^2} = x^6-1$$



Atención

Tener en cuenta que es necesario identificar los términos para desarrollar sin inconvenientes los productos notables.

Nota

Potencia de potencia:

$(a^m)^n = a^{m\,.\,n}$

$\sqrt[2]{n^2} = \sqrt{n}^2 = n$

Observación

1. De las identidades de Legendre:
   $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
   $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
   Se deduce:
   $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$
2. $(a-b)^2 = (b-a)^2$
   Ejemplo:
   $(9x-2y)^2 = (2y-9x)^2$



Nota

Es necesario tener en cuenta que si:
$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

Entonces también se cumple:
$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

Ejemplo:
$9m^2 - 49 = (3m)^2 - 7^2$
$= (3m + 7)(3m - 7)$

A este proceso de solución se le llama FACTORIZACIÓN, tema que se verá más adelante.

4. Multiplicación de binomios con un término en común (identidad de Stevin)

$$(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$$

Veamos algunos ejemplos:

1. Desarrolla: $(x + 8)(x + 3)$

Resolución:

$$(\underbrace{x + 8}_{a})(x + \underbrace{3}_{b}) = x^2 + (\underbrace{8}_{a} + \underbrace{3}_{b})x + \underbrace{8}_{a} . \underbrace{3}_{b}$$
$$= x^2 + 11x + 24$$

2. Desarrolla: $(m - 7)(m + 5)$

Resolución:

Hacemos que lo propuesto tome forma de la identidad:

$(m - 7)(m + 5) = (m + (-7))(m + 5)$
$= m^2 + (-7 + 5)m + (-7)(5)$
$(m - 7)(m + 5) = m^2 - 2m - 35$

5. Binomio al cubo

Binomio suma al cubo

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomio diferencia al cubo

$$(a - b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

1. Desarrolla: $(m + 7)^3$

Resolución:

Identificamos términos:

$$(\underbrace{m}_{a} + \underbrace{7}_{b})^3 = \underbrace{m^3}_{a^3} + 3\underbrace{m^2}_{a^2} . \underbrace{7}_{b} + 3 . \underbrace{m}_{a} . \underbrace{7^2}_{b^2} + \underbrace{7^3}_{b^3}$$
$$= m^3 + 21m^2 + 147m + 343$$

2. Desarrolla: $(m - 7)^3$

Resolución:

$$(\underbrace{m}_{a} - \underbrace{7}_{b})^3 = \underbrace{m^3}_{a^3} - 3\underbrace{m^2}_{a^2} . \underbrace{7}_{b} + 3\underbrace{m}_{a} . \underbrace{7^2}_{b^2} - \underbrace{7^3}_{b^3}$$
$$= m^3 - 21m^2 + 147m - 343$$

6. Identidades de Cauchy (otras formas de expresar un binomio al cubo)

Binomio suma al cubo

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Binomio diferencia al cubo

$$(a - b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Ejemplos:

1. Desarrolla: $(2m^2 + n)^3$

Resolución:

$$(\underbrace{2m^2}_{a} + \underbrace{n}_{b})^3 = \underbrace{(2m^2)^3}_{a^3} + \underbrace{(n)^3}_{b^3} + 3(\underbrace{2m^2}_{a})(\underbrace{n}_{b})(\underbrace{2m^2}_{a} + \underbrace{n}_{b})$$
$$= 8m^6 + n^3 + 6m^2n\,(2m^2 + n)$$

2. Desarrolla: $(7m - n^3)^3$

Resolución:

$$(\underbrace{7m}_{a} - \underbrace{n^3}_{b})^3 = \underbrace{(7m)^3}_{a^3} - \underbrace{(n^3)^3}_{b^3} - 3(\underbrace{7m}_{a})(\underbrace{n^3}_{b})(\underbrace{7m}_{a} - \underbrace{n^3}_{b})$$
$$= 343m^3 - n^9 - 21mn^3(7m - n^3)$$

7. Suma y diferencia de cubos

Suma de cubos

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \equiv \underbrace{a^3 + b^3}_{\text{Suma de cubos}}$$

Diferencia de cubos

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) \equiv \underbrace{a^3 - b^3}_{\text{Diferencia de cubos}}$$

Ejemplos:

1. Desarrolla: $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$

Resolución:

Dando una forma adecuada a la expresión para identificar términos:

$$(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) = (\underbrace{x}_{a} + \underbrace{3y}_{b})(\underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{(x)(3y)}_{ab} + \underbrace{(3y)^2}_{b^2}) = \underbrace{x^3}_{a^3} + \underbrace{(3y)^3}_{b^3} = x^3 + 27y^3$$

2. Desarrolla: $(m - n^2)(m^2 + mn^2 + n^4)$

Resolución:

$$(\underbrace{m}_{a} - \underbrace{n^2}_{b})(\underbrace{m^2}_{a^2} + \underbrace{m . n^2}_{ab} + \underbrace{(n^2)^2}_{b^2}) = \underbrace{(m)^3}_{a^3} - \underbrace{(n^2)^3}_{b^3} = m^3 - n^6$$

EFECTUAR

1. $(x + 2)^2$
2. $(x + 5)^2$
3. $(3 + x)^2$
4. $(x - 4)^2$
5. $(x - 6)^2$
6. $(x - y)^2$
7. $(x + 2)^2 + (x - 2)^2$
8. $(4 + a)^2 + (4 - a)^2$
9. $(6 + a)^2 - (6 - a)^2$
10. $(n + x)^2 - (n - x)^2$
11. $(x + 5)(x - 5)$
12. $(y + 2)(y - 2)$
13. $(x + 1)(x - 1)$
14. $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$
15. $(x^3 + 5)(x^3 - 5)$
16. $(x + 9)(x + 2)$
17. $(x + 4)(x + 3)$
18. $(x + 2)(x + 7)$
19. $(x - 5)(x + 10)$
20. $(a + 2)^3$



Problemas resueltos



1 Efectúa: $R = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2x(x+3)$

Resolución:

Desarrollamos los binomios al cuadrado:

$R = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 2x^2 - 6x$

$R = \underbrace{x^2 + x^2 - 2x^2}_{0} + \underbrace{2x + 4x - 6x}_{0} + 1 + 4$

$R = 0 + 0 + 5 \Rightarrow R = 5$

2 Calcula: $M = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{7}-2)$

Resolución:

En la expresión se observa diferencia de cuadrados:

$M = \underbrace{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}\underbrace{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$M = [(\sqrt{7})^2 - (2)^2][(\sqrt{5})^2 - (1)^2]$

$M = [7-4][5-1] \Rightarrow M = 3 \times 4 \Rightarrow M = 12$

3 Efectúa: $H = (\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)$

Resolución:

En la expresión se observa suma de cubos:

$H = (\underbrace{\sqrt[3]{3}}_{a} + \underbrace{1}_{b})(\underbrace{\sqrt[3]{9}}_{a^2} - \underbrace{\sqrt[3]{3}}_{ab} + \underbrace{1}_{b^2})$

$H = (\sqrt[3]{3}+1)((\sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt[3]{3})(1) + (1)^2)$

$H = (\sqrt[3]{3})^3 + (1)^3 \Rightarrow H = 4$

4 Efectúa: $M = (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4})$

Resolución:

En la expresión se observa diferencia de cubos:

$M = (\underbrace{\sqrt[3]{10}}_{a} - \underbrace{\sqrt[3]{2}}_{b})(\underbrace{(\sqrt[3]{10})^2}_{a^2} + \underbrace{(\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{2})}_{ab} + \underbrace{(\sqrt[3]{2})^2}_{b^2})$

$M = (\sqrt[3]{10})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 10 - 2 \Rightarrow M = 8$

5 Si $ab = 8$ y $a^2 + b^2 = 20$, además: $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces el valor de: $(a+b)^3$ es:

Resolución:

Por binomio suma al cuadrado se sabe:

$(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab$

Reemplazamos:

$(a+b)^2 = 20 + 2(8)$

$(a+b)^2 = 36 \Rightarrow a + b = 6$

Nos piden: $(a+b)^3 = 6^3 = 216$

6 Si $x - y = 4$, además $xy = 3$; halla: $x^3 - y^3$

Resolución:

Por identidad de Cauchy:

$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

Nos piden $x^3 - y^3$, entonces:

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

Reemplazamos datos:

$x^3 - y^3 = (4)^3 + 3(3)(4)$

$x^3 - y^3 = 64 + 36$

$x^3 - y^3 = 100$

7 Efectúa: $(9x^2 + 3x + 1)(3x - 1)$

Resolución:

Por diferencia de cubos se sabe: $a^3 - b^3 \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Notamos que el problema es un caso de diferencia de cubos:

$(9x^2 + 3x + 1)(3x-1) = [\underbrace{(3x)^2}_{a^2} + \underbrace{(3x)(1)}_{ab} + \underbrace{(1)^2}_{b^2}](\underbrace{3x}_{a} - \underbrace{1}_{b})$

$= (3x)^3 - (1)^3$

$= 27x^3 - 1$

8 Reduce: $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)+1$

Resolución:

En el problema se observa simultáneamente suma y diferencia de cubos:

$\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{Dif. de cubos: } x^3 - 1^3}\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{\text{Suma de cubos: } x^3 + 1^3}+1$

Entonces se convierte en:

$\underbrace{(x^3-1)(x^3+1)}_{\text{Dif. de cuadrados}} + 1 = (x^3)^2 - 1^2 + 1 = x^6 - 1 + 1 = x^6$

9 Si $x^2 + x^{-2} = 4$, calcula: $x^6 + x^{-6}$

Resolución:

Sea:

$x^2 = a \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{a} \Rightarrow x^2 + x^{-2} = a + \frac{1}{a} = 4$

Nos piden $x^6 + x^{-6}$:

$x^6 + x^{-6} = (x^2)^3 + (x^{-2})^3 = a^3 + \frac{1}{a^3}$

Identidad de Cauchy:

$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

Luego:

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a.\frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$(4)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3(4)$

$a^3 + \frac{1}{a^3} = 52 \Rightarrow x^6 + x^{-6} = 52$

Nota

Ten en cuenta:

- Una división es exacta cuando: $R(x) = 0$

  Luego:

  $D(x) = d(x)Q(x)$ o

  $\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x)$

- Una división es inexacta cuando: $R(x) \neq 0$

  Luego:

  $D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$ o

  $\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Es aquella operación inversa a la multiplicación definida para polinomios en una sola variable cuyo objetivo es calcular dos expresiones algebraicas llamadas cociente y residuo obtenidas de otras dos expresiones llamadas dividendo y divisor.

Representación

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Elementos:

D(x): dividendo	Q(x): cociente
d(x): divisor	R(x): resto o residuo

Estos polinomios están relacionados mediante la identidad fundamental:

$$D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$$

PROPIEDADES

Es necesario que: $D°(x) \geq d°(x)$, esto para asegurar que el cociente sea un polinomio, a partir de ello:

1. El grado del cociente es el exceso entre el grado del dividendo respecto al grado del divisor.

$$Q°(x) = D°(x) - d°(x)$$

2. El grado del residuo máximo es una unidad menor que el grado del divisor.

$$R°(x)_{máx.} = d°(x) - 1$$

Atención

Veamos la siguiente simbolización:

$D° = D°(x)$: grado del dividendo.

$d° = d°(x)$: grado del divisor.

$Q° = Q°(x)$: grado del cociente.

$R° = R°(x)$: grado del resto o residuo.

$R°_{máx.} = R°(x)_{máx.}$: grado del resto o residuo máximo.



TÉCNICAS PARA DIVIDIR

1. Horner

Válido para la división de polinomios de cualquier grado. Considerando solo los coeficientes, veamos su ubicación en el esquema de Guillermo Horner.

El coeficiente no cambia de signo: d | D I V I D E N D | O

Cambian de signo: i v i s o r

n.° lugares = d°(x)

C O C I E N T E | R E S I D U O

Pasos:

P1: dividir el primer coeficiente del dividendo por el primero del divisor; este es el primer término del cociente.

P2: el primer término del cociente se multiplica por cada uno de los coeficientes del divisor, los resultados se colocan dejando una columna de lado.

P3: reducir la siguiente columna y repetir el paso anterior tantas veces hasta obtener el último término del cociente (término independiente del cociente).

P4: toda suma de columnas que se realiza en la zona del residuo no se divide, se coloca directamente.

Ejemplo:

Divide: $\frac{-1 + 4x^4 + 9x^3 + 6x^5}{x - 1 + 2x^3}$

Resolución:

- Completamos y ordenamos:

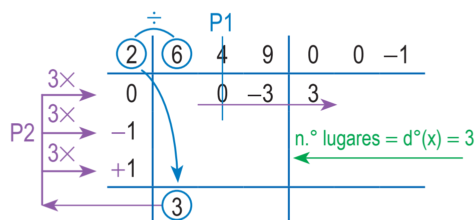
$$\frac{6x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 0x^2 + 0x - 1}{2x^{3} + 0x^2 + x - 1}$$

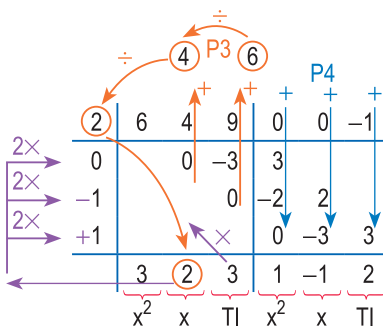
$d°(x) = 3$

Nota

Tener en cuenta que en todas las técnicas para dividir, los polinomios deben estar ordenados en forma descendente respecto a una sola variable y si falta alguna se completan con ceros.

- Disponemos solo de los coeficientes en el esquema de Horner:



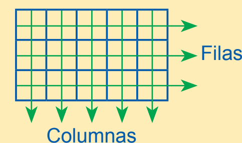


$\therefore$ $Q(x) = 3x^2 + 2x + 3$ (cociente)

$R(x) = x^2 - x + 2$ (resto)

Observación

- Cuadrícula para identificar filas y columnas:



- El número de columnas que presenta el RESTO es numéricamente igual al grado del divisor contado de derecha a izquierda.

n.° lugares = d°(x)

- TI: término independiente



2. Ruffini

Aplicable cuando el divisor es de la forma $ax \pm b$ o cualquier otra expresión transformable a esta.

Para el CASO GENERAL DE SOLUCIÓN veamos el esquema de Paolo Ruffini:

D I V I S O R $ax \pm b = 0$ $x = \mp \frac{b}{a}$	D I V I D E N D O	
Primer coeficiente del divisor: $\div a$	Coeficientes del cociente alterado.	RESTO
	Verdaderos coeficientes del cociente luego de dividir entre "a".	

Pasos:

P1: el primer elemento del dividendo se baja, este corresponde al primer coeficiente del cociente.

P2: se procede como en la división por Horner y el resultado de reducir la última columna es el resto de la división.

Ejemplos:

1. Cuando: $a = 1$

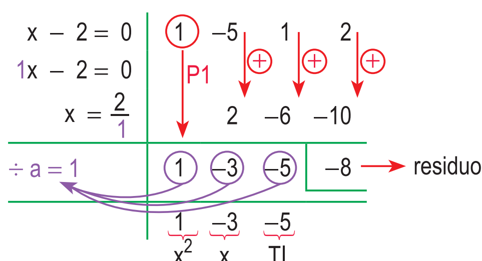
Efectúa:

$$\frac{2 + x^3 + x - 5x^2}{x - 2}$$

Resolución:

- Ordenamos el dividendo:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + x + 2}{x - 2}$$



Donde:

$\therefore$ $Q(x) = x^2 - 3x - 5$ (Cociente)

$R(x) = -8$ (Residuo)

Nota

El método de Ruffini se considera como un caso particular del método de Horner.

2. Cuando: $a \neq 1$

Divide:

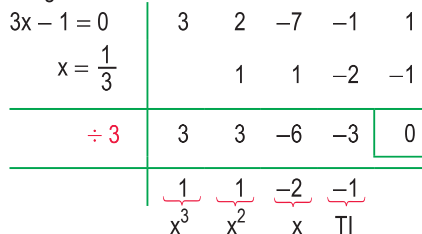
$$\frac{3x^4 - 7x^2 + 2x^3 - x + 1}{3x - 1}$$

Resolución:

- Ordenamos el dividendo:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - x + 1}{3x - 1}$$

Luego:



$3x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{3}$	3	2	−7	−1	1
		1	1	−2	−1
$\div 3$	3	3	−6	−3	0
	1	1	−2	−1	
	x^3	x^2	x	TI	

Donde:

$\therefore$ $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$

$R(x) = 0$

Recuerda

El resto obtenido por Ruffini siempre es una constante.



TEOREMA DEL RESTO

Te permite encontrar el resto de la división sin efectuarla, siempre y cuando el divisor sea un binomio.

Lema o enunciado de Descartes

Sea $P(x)$ un polinomio no constante; el resto de dividir $P(x)$ por $(ax \pm b)$ viene dado por $P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$.

Regla práctica:

1. El divisor se iguala a cero: $ax \pm b = 0$
2. Despejar la variable: $x = \mp\frac{b}{a}$
3. Reemplazamos el valor de "x" en el polinomio dividendo y el valor obtenido es el RESTO de la división.

Ejemplos:

1. Halla el resto en: $\dfrac{(x-5)^{2009} + x^2 + 1}{x-6}$

Resolución:
Según la regla práctica:
$x - 6 = 0$
$x = 6$

Reemplazamos $x = 6$:
$R(x) = (6-5)^{2009} + (6)^2 + 1 = 1^{2009} + 36 + 1$
$\therefore\ R(x) = 38$

2. Calcula "n", si el resto de la división:

$\dfrac{3x^4 - 24x^2 + (n+1)x - 5}{x-3}$ es 31.

Resolución:
Aplicamos la regla práctica:
$x - 3 = 0$
$x = 3$

Reemplazamos $x = 3$:
$R(x) = 3(3^4) - 24(3)^2 + (n+1)(3) - 5$
$R(x) = 3^5 - 24(9) + 3n + 3 - 5$
$\underbrace{R(x)}_{\text{(Dato)}} = 243 - 216 + 3n - 2 = 27 + 3n - 2$
$31 = 25 + 3n$
$31 - 25 = 3n$
$6 = 3n \quad \therefore\ n = 2$



DIVISIBILIDAD

Un polinomio es divisible por otro, si la división es exacta, es decir, si: $R(x) = 0$

Teoremas:

I. Si un polinomio P(x) se anula para x = a (P(a) = 0), entonces P(x) es divisible por (x – a). Además; x = a es un cero o raíz de P(x).

$P(x) = (x-a)Q(x)$

Ejemplo:
$P(x) = 5x^3 + x^2 - 6$ se anula para $x = 1$.
$P(1) = 5(1)^3 + (1)^2 - 6 = 6 - 6 = 0$
$\Rightarrow$ P(x) es divisible por $(x-1)$
$P(x) = (x-1)Q(x)$

II. Si un polinomio P(x) es divisible por separado por los binomios (x – a), (x – b) y (x – c), entonces será divisible por el producto de ellos.
Si:

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= (x-a)Q_1(x) \Rightarrow R(x) = 0 \\ P(x) &= (x-b)Q_2(x) \Rightarrow R(x) = 0 \\ P(x) &= (x-c)Q_3(x) \Rightarrow R(x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) \Rightarrow R(x) = 0}$$

Ejemplo:
Un polinomio cúbico mónico P(x) es divisible por (x – 3) y (x – 6), además, P(7) = 20.
Determina dicho polinomio.

Resolución:
Del enunciado, P(x) será de la forma siguiente:
$P(x) = (x-3)(x-6)(ax-c)$
a = 1 (polinomio mónico)

Además:
$P(7) = (7-3)(7-6)(7-c)$
$20 = 4 \,.\, 1 \,.\, (7-c)$
$5 = 7 - c \Rightarrow c = 2$

Luego:
$P(x) = (x-3)(x-6)(x-2)$
$\therefore P(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 36$



Problemas resueltos



1 Halla el cociente de la siguiente división:

$$\frac{4x^4 - 2x^3 + x - 2}{2x^2 - x - 1}$$

Resolución:

Según las propiedades:

$Q°(x) = D°(x) - d°(x) = 4 - 2 = 2$

$R°(x)_{máx.} = d°(x) - 1 = 2 - 1 = 1$

Por Horner, tendremos:

÷					
2	4	−2	0	1	−2
+1		2	2		
+1			0	0	
				1	1
	2	0	1	2	−1
	x^{2}	x	TI	x	TI

$Q°(x) = 2$

Por consiguiente:

$Q°(x) = 2x^2 + 1$

2 Encuentra el cociente de la división:

$$\frac{m^5 + m^4 + 2 + 3m^3 + 2m^2}{3 + m^2 + m}$$

Resolución:

Según las propiedades:

$Q°(m) = D°(m) - d°(m) = 5 - 2 = 3$

$R°(m)_{máx.} = d°(m) - 1 = 2 - 1 = 1$

Ordenamos y completamos:

1	1	1	3	2	0	2
−1		−1	−3			
−3			0	0		
				0	0	
					−2	−6
	1	0	0	2	−2	−4
	m^{3}	m^2	m	TI	m	TI

$Q°(m) = 3$

Nos piden el cociente de la división:

$\therefore\ Q(m) = m^3 + 2$

3 Halla la suma de coeficientes del cociente obtenido al dividir:

$$\frac{6x^5 + x^4 + 8x^3 - 4x + 8}{3x - 1}$$

Resolución:

Por Ruffini:

$3x - 1 = 0$	6	1	8	0	−4	8
$x = \frac{1}{3}$		2	1	3	1	−1
÷ 3	6	3	9	3	−3	7
	2	1	3	1	−1	

Coeficientes del cociente

Luego, nos piden:

Σcoef. $Q(x) = 2 + 1 + 3 + 1 - 1$

$\therefore\ \Sigma$coef. $Q(x) = 6$

4 Encuentra el cociente de:

$$\frac{35y^4 + 4y^3 - 4y + 11}{5y - 3}$$

Resolución:

Completamos y aplicamos Ruffini:

$5y - 3 = 0$	35	4	0	−4	11
$y = \frac{3}{5}$		21	15	9	3
÷ 5	35	25	15	5	14
	7	5	3	1	
	y^3	y^2	y	TI	

$\therefore\ Q(y) = 7y^3 + 5y^2 + 3y + 1$

5 Halla el resto de la división:

$$\frac{(x-3)^5 + (x+1)^3 + x^4 + x^3 + 3x + 1}{x - 2}$$

y calcula: $\sqrt[3]{\text{residuo} + 7}$

Resolución:

Según la regla práctica:

1. El divisor se iguala a cero: $x - 2 = 0$
2. Despejar la variable: $x = 2$
3. Reemplazamos en el polinomio dividendo:

$R(x) = (2-3)^5 + (2+1)^3 + 2^4 + 2^3 + 3(2) + 1$

$= (-1)^5 + 3^3 + 16 + 8 + 7$

Tenemos en cuenta que:

$(-)^{par} = +$ $\wedge$ $(-)^{impar} = -$

Luego:

$R(x) = -1 + 27 + 31$

$\therefore\ R(x) = 57 = \text{residuo}$

Nos piden: $\sqrt[3]{\text{residuo} + 7} = \sqrt[3]{57 + 7} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

$\therefore\ \sqrt[3]{\text{residuo} + 7} = 4$

FACTORIZACIÓN

Observación

A menos que se diga lo contrario, generalmente la factorización se realiza en los racionales ($\mathbb{Q}$).



CONCEPTO

Es el procedimiento mediante el cual los polinomios se expresan como producto de dos o más factores polinomiales.

CAMPOS NUMÉRICOS

Un conjunto de números pertenecen a un campo numérico, si cuando se realiza una determinada operación fundamental entre estos, el resultado también pertenece a dicho conjunto.

Sean los campos numéricos:

- Conjunto de los números naturales: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$
- Conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{... -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4;...\}$
- Conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} = \{\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; -4; -2; 0; 5; 10;...\}$
- Conjunto de los números irracionales: $\mathbb{I} = \{\pi; e; \sqrt{7}; \sqrt{2}; ...\}$
- Conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = \left\{\pi; e; \sqrt{11}; \frac{21}{30}; \frac{7}{11}; 9; 0; -2; -100; ...\right\}$
- Conjunto de los números complejos: $\mathbb{C} = \left\{-7i; 2i; \pi; e; \sqrt{11}; \frac{7}{11}; 9; \sqrt{-100}; ...\right\}$

Polinomio definido en un campo numérico

Un polinomio está definido en un campo numérico si todos sus coeficientes están incluidos en dicho campo.

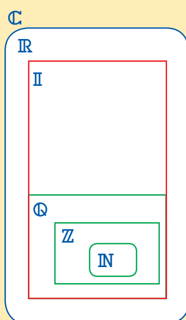
Ejemplos:

- $A(x; y) = -3xy^2 + \frac{5}{7}x^2 - \frac{2}{9}xy^9$: está definido en $\mathbb{Q}$.
- $B(x; y) = \sqrt{2}x^2y^2 - xy^3 + \sqrt{7}y^3 - \sqrt{3}$: está definido en $\mathbb{R}$.
- $C(x; y) = \sqrt{7}ixy^7 + \frac{2}{3}ix^2 - \frac{1}{2}xy^2 + 3xy$: está definido en $\mathbb{C}$.

Donde: $i = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria)

Recuerda

Esquemáticamente los conjuntos numéricos, se representan así:





Factor primo en el campo de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

Es aquella expresión algebraica que se puede identificar con los siguientes criterios:

1. Debe ser un polinomio de coeficientes contenidos en los racionales.
2. Admite dos divisores (la unidad y la misma expresión).
3. El factor primo contiene por lo menos una variable.

Ejemplos:

- $3x + 1$
- $ab - 1$
- $x^2 - xy + y$
- $m - n$
- $x - y$
- $2m + 5n$
- $a^3 + 2$
- $m - n^2$

Factor o divisor algebraico

Es aquel polinomio no constante que divide en forma exacta a un polinomio.

Ejemplo:

Sea: $P(a; b) = a^2 - b^2$ uno de sus factores es: $a + b$

Es decir; $\frac{P(a; b)}{a + b}$ es exacta: $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$ $(R(a; b) = 0)$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

A) Método del factor común (agrupaciones de términos)

Consiste en localizar un término que se repite en la expresión a factorizar.

Ejemplos:

1. Factoriza: $P(a; b) = ab + a^2b^2 + a^3b^3$

   Si observamos la expresión, el término que se repite es ab; luego agrupamos:

   $P(a; b) = ab(1 + ab + a^2b^2)$



2. Factoriza: $M(x) = ax + 7a + x + 7$
   Aquí, por ejemplo, al agrupar los dos primeros términos, el factor común es **a**; es decir:
   $M(x) = (ax + 7a) + (x + 7) = a(x + 7) + (x + 7)$
   Ahora el término común es: $(x + 7)$
   $M(x) = (x + 7)(a + 1)$

B) Método de las identidades

En este método se debe manejar algunas propiedades como es el hecho de reconocer un producto notable.

Trinomio cuadrado perfecto : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Trinomio cuadrado perfecto : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Diferencia de cuadrados : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Suma de cubos : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo:

Factoriza: $(3x + 2y)^2 - (3x - 7y)^2$

Desdoblando la diferencia de cuadrados obtenemos:

$(3x + 2y)^2 - (3x - 7y)^2 = (3x + 2y + 3x - 7y)(3x + 2y - 3x + 7y) = (6x - 5y)9y$



Observación

Del ejemplo 2:
Cuando el tercer término tiene signo (–), sus factores tendrán signos diferentes, de manera que el resultado coincida con el 2.° término.

C) Método del aspa simple

Criterio aplicado generalmente para factorizar polinomios completos de segundo grado.

Ejemplos:

1. Factoriza: $T(x) = x^2 + 12x + 35$
   Pasos:
   i. Descomponemos el primer y tercer término en sus factores primos:
   $T(x) = x^2 + 12x + 35$
   $x \quad 5$
   $x \quad 7$ } Factores primos.
   ii. Efectuamos el producto de los factores primos en aspa, el resultado debe coincidir con el término central:
   $T(x) = x^2 + 12x + 35$
   $x \quad 5 \rightarrow 5x$
   $x \quad 7 \rightarrow 7x$
   Coinciden $12x$
   iii. Los factores son la suma horizontal.
   $\therefore\ T(x) = (x + 5)(x + 7)$

2. Factoriza: $C(a; b) = a^6b^2 - a^3b - 6$
   Teniendo en cuenta los pasos señalados:
   i. Descomponemos el primer y tercer término en sus factores primos.
   $C(a; b) = a^6b^2 - a^3b - 6$
   $a^3b \quad -3$
   $a^3b \quad +2$ } Factores primos.
   ii. Efectuamos el producto en aspa:
   $C(a; b) = a^6b^2 - a^3b - 6$
   $a^3b \quad -3 \rightarrow -3a^3b$
   $a^3b \quad +2 \rightarrow 2a^3b$
   $-a^3b$
   iii. Al final los factores son:
   $\therefore\ C(a; b) = (a^3b - 3)(a^3b + 2)$

EFECTUAR

Factoriza los siguientes polinomios:

Grupo I

1. $ax + bx + ay + by$
2. $6ax + 3a + 1 + 2x$
3. $xy^2 + xz^2 + yz^2 + xy^2$
4. $16x^2 + 40x + 25$
5. $x^4 - 4b^2$
6. $x^2 + 5x + 6$
7. $ax + a + bx + b$
8. $(a + 1)(a - 2) + 3b(a + 1)$
9. $ax + x - 3a - 3$
10. $az - aq + bz - bq$

Grupo II

1. $c^2x + c^2y + 2x + 2y$
2. $a^2x + a^2y + cx + cy$
3. $x^2 - y^2 + x^2 - y^2$
4. $(x^2 - y^2)^2 - (y^2 - z^2)^2$
5. $2x + 3a + 4xy + 6ay$
6. $7x^2y^3 + 14x^3y^2$
7. $a^2x^2 + b^2y^2 - b^2x^2 - a^2y^2$
8. $9y^2 - 81y$
9. $a^4m + a^4n - b^4n - b^4m$
10. $(3x + 1)(2a + 3) + (2a + 3)(4x + 2)$

Problemas resueltos

1 Factoriza: $T(x; y) = x^8y^2 - x^2y^8$
Da como respuesta la suma de sus factores cuadráticos.

Resolución:

Extraemos el factor común: x^2y^2
$T(x; y) = x^2y^2(x^6 - y^6)$

Desdoblamos la diferencia de cuadrados: $x^6 - y^6$
$T(x; y) = x^2y^2(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$

Observamos la diferencia y suma de cubos respectivamente, luego:
$T(x; y) = x^2y^2(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Nos piden:
Σfact. primos cuadráticos $= (x^2 + xy + y^2) + (x^2 - xy + y^2)$
Σfact. primos cuadráticos $= 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$
$\therefore\ \Sigma fpc = 2(x^2 + y^2)$

2 Halla la suma de los términos independientes de los factores primos de:
$Z(x) = 2(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(2x + 1) + (x^2 + 1)(x + 1)$

Resolución:

Por el método del factor común: $x^2 + 1$
$Z(x) = (x^2 + 1)(2 + (2x + 1) + (x + 1))$

Reducimos términos semejantes dentro del paréntesis:
$Z(x) = (x^2 + 1)(2 + 2\underline{x} + 1 + \underline{x} + 1) = (x^2 + 1)(3x + 4)$

Los factores primos son:
$x^2 + 1 \Rightarrow TI = 1 \ \wedge\ 3x + 4 \Rightarrow TI = 4\ \therefore \Sigma TI = 4 + 1 = 5$

3 Factoriza: $B(x) = 35x^4 - 9x^2 - 2$.
Luego, indica el factor primo de menor suma de coeficientes.

Resolución:

Factorizamos por el método del aspa simple:

$$
\begin{array}{llcl}
 & 35x^4 - 9x^2 - 2 & & \\
1.^{er}\ \text{factor} & 5x^2 & -2 \rightarrow & -14x^2 \\
2.^{o}\ \text{factor} & 7x^2 & 1 \rightarrow & 5x^2 \\
 & & & \overline{-9x^2}
\end{array}
$$

Los factores primos son:
$5x^2 - 2 \Rightarrow \Sigma$coef. $= 5 + (-2) = 3$ (menor)
$7x^2 + 1 \Rightarrow \Sigma$coef. $= 7 + 1 \quad = 8$
$\therefore$ El factor primo de menor suma de coeficientes es: $5x^2 - 2$

4 Factoriza: $E(x) = (mx - 2n)^2 - (nx - 2m)^2$
e indica el número de factores primos.

Resolución:

Desdoblamos la diferencia de cuadrados:
$E(x) = ((\underline{mx} - 2n) + (nx - \underline{2m}))((\underline{mx} - 2n) - (nx - \underline{2m}))$

Agrupamos convenientemente en cada paréntesis:
$E(x) = ((mx - 2m) + (nx - 2n))((mx + 2m) - (2n + nx))$

Factorizamos m y n respectivamente en cada paréntesis:
$E(x) = (m(x - 2) + n(x - 2))(m(x + 2) - n(x + 2))$

Extraemos los factores: $(x - 2)$ y $(x + 2)$
$E(x) = \mathbf{(x - 2)}(m + n)\mathbf{(x + 2)}(m - n)$
$\therefore$ Observamos 2 factores primos.

5 Factoriza:
$A = m^2xy + mny^2 + mnx^2 + n^2xy$

Resolución:

Agrupamos de dos en dos y buscamos factores en común:
$A = (m^2xy + mny^2) + (mnx^2 + n^2xy)$

Factorizando obtenemos:
$A = my(mx + ny) + nx(mx + ny)$
$\therefore A = (mx + ny)(my + nx)$

6 Factoriza:
$(a + b + c)y^2 - (a + b + c)x^2$.
Indica la suma de los factores primos.

Resolución:

Factorizamos:
$(a + b + c)\ (y^2 - x^2)$

Desarrollamos la diferencia de cuadrados:
$(a + b + c)\ (y - x)\ (y + x)$
$\therefore \Sigma$ factores primos $= a + b + c + 2y$

7 Factoriza:
$18x^2 - 69x + 21$
Indica la suma de sus factores primos.

Resolución:

Aplicamos el método del aspa simple:

$$
\begin{array}{llcl}
 & 18x^2 - 69x + 21 & & \\
1.^{er}\ \text{factor} & 2x & -7 \rightarrow & -63x \\
2.^{o}\ \text{factor} & 9x & -3 \rightarrow & -\ 6x \\
 & & & \overline{-69x}
\end{array}
$$

Luego:
$18x^2 - 69x + 21 = 3(2x - 7)(3x - 1)$

$\Rightarrow\ (2x - 7) + (3x - 1) = 2x - 7 + 3x - 1$
$= 5x - 8$

$\therefore$ La suma de sus factores primos es: $5x - 8$

8 Indica la cantidad de factores primos de:
$P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

Resolución:

Factorizamos utilizando el método del aspa simple:

$$
\begin{array}{llcl}
 & P(x) = x^4 + 2x^2 - 3 & & \\
1.^{er}\ \text{factor} & x^2 & 3 \rightarrow & 3x^2 \\
2.^{o}\ \text{factor} & x^2 & -1 \rightarrow & -x^2 \\
 & & & \overline{2x^2}
\end{array}
$$

Luego, los factores son:
$(x^2 + 3)(x^2 - 1)$
$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$

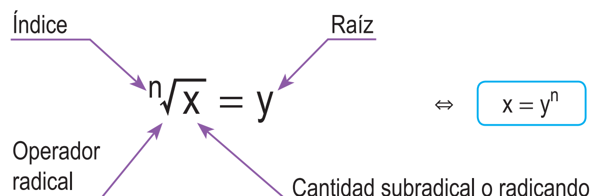
$\therefore$ La cantidad de factores primos es 3.

RADICACIÓN

CONCEPTO

Es aquella operación matemática de aplicación a una expresión algebraica llamada subradical. Consiste en hallar otra expresión algebraica denominada raíz, que elevada al índice del radical nos resulte la cantidad subradical.

Representación



Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{27} = 3 \Longleftrightarrow 27 = 3^3$
2. $\sqrt[3]{64} = 4 \Longleftrightarrow 64 = 4^3$
3. $\sqrt{4} = 2 \Longleftrightarrow 4 = 2^2$
4. $\sqrt[3]{125} = 5 \Longleftrightarrow 125 = 5^3$
5. $\sqrt{100} = 10 \Longleftrightarrow 100 = 10^2$
6. $\sqrt[4]{625} = 5 \Longleftrightarrow 625 = 5^4$

Exponente fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Ejemplos:

1. $7^{\frac{2}{7}} = \left(\sqrt[7]{7}\right)^2$
2. $11^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{11}$
3. $31^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{(31)^{10}} = \left(\sqrt[3]{31}\right)^{10}$
4. $2^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{2^7}$
5. $3^{\frac{15}{10}} = \sqrt[10]{3^{15}}$
6. $(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125}$
7. $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$
8. $5^{\frac{10}{20}} = \sqrt[20]{5^{10}}$
9. $(81)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$

Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4\,.\,5} = \sqrt[3]{4}\,.\,\sqrt[3]{5}$
2. $\sqrt[7]{30} = \sqrt[7]{5\,.\,3\,.\,2} = \sqrt[7]{5}\,.\,\sqrt[7]{3}\,.\,\sqrt[7]{2}$
3. $\sqrt[5]{45} = \sqrt[5]{9.5} = \sqrt[5]{9}\,.\,\sqrt[5]{5}$
4. $\sqrt[3]{4}\,.\,\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4.16} = \sqrt[3]{64}$

Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a} = a^{\frac{1}{mnp}}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{20}} = \sqrt[5\,.\,3]{20} = \sqrt[15]{20}$
2. $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{111}}} = \sqrt[7\,.\,3\,.\,2]{111} = \sqrt[42]{111}$
3. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{10}}} = \sqrt[2\,.\,3\,.\,5]{10} = \sqrt[30]{10}$
4. $\sqrt[4]{\sqrt{7}} = \sqrt[4.2]{7} = \sqrt[8]{7} = 7^{\frac{1}{8}}$

Raíz de una fracción

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,;\, b \neq 0$$

Atención

Ley de signos: el signo de una raíz depende del signo del radicando.

$\sqrt[\text{impar}]{+} = +$

$\sqrt[\text{impar}]{-} = -$

$\sqrt[\text{par}]{+} = +$

$\sqrt[\text{par}]{-}$ = número imaginario

Así:

- $\sqrt[5]{32} = +2$
- $\sqrt[3]{-1} = -1$
- $\sqrt[4]{16} = +2$
- $\sqrt[4]{-16} = 2i$

- i: unidad imaginaria $(\sqrt{-1})$
- A la unidad imaginaria la estudiaremos en el siguiente capítulo: NÚMEROS COMPLEJOS



Recuerda

En las operaciones con radicales se procede así:

I. Introducir factores en una raíz.
Se realiza potenciando el factor a un exponente igual al índice que tiene la raíz.
Veamos:

$$2x^4y^3\sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{2^5(x^4)^5(y^3)^5x^2y}$$
$$= \sqrt{32x^{22}y^{16}}$$

II. Extraer factores de una raíz
Se realiza solo cuando el exponente del factor es mayor o igual que el índice.
Veamos:

$$\sqrt[7]{x^7y^{21}z^{30}w^5}$$
$$= \sqrt[7]{x^7(y^3)^7(z^4)^7z^2w^5}$$
$$= xy^3z^4\sqrt[7]{z^2w^5}$$

Atención

Simplificación de radicales
Simplificar un radical es transformarlo en otro equivalente utilizando los teoremas de radicales y exponentes.
Veamos:

- $\sqrt[3]{16a^7} = \sqrt[3]{2^3.2.a^6.a}$
$= \sqrt[3]{2^3.a^6}.\sqrt[3]{2a}$
$= 2a^2\sqrt[3]{2a}$

Reducción de radicales semejantes
Los radicales semejantes se reducen como si fueran términos semejantes.
Veamos:

- $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$
$= (5 - 2 + 7)\sqrt{3}$
$= 10\sqrt{3}$



Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$
2. $\sqrt[4]{\frac{16}{2401}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{2401}} = \frac{2}{7}$
3. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$
4. $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$
5. $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$
6. $\sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}} = \frac{10}{4}$

HOMOGENIZACIÓN DE RADICALES

Es la operación que consiste en transformar radicales con diferente índice, en radicales con igual índice. Para tal fin se aplican los teoremas de exponentes y radicales, asimismo, se recomienda tener en cuenta las siguientes reglas.

Regla I: se halla el mínimo común múltiplo (MCM) de los índices de los radicales, que será el índice común.

Regla II: se divide el MCM encontrado entre el índice original de cada radical, y cada cociente se multiplica por el exponente también original de la cantidad subradical.

Ejemplo:

Dados: $\sqrt{a}$; $\sqrt[5]{b}$; $\sqrt[7]{(cd)^3y}$; expresarlos como radicales homogéneas.

Resolución:

Regla I: MCM (2; 5; 7) = 70

Regla II: $\sqrt[70]{a^{\frac{70}{2}}}$; $\sqrt[70]{b^{\frac{70}{5}}}$; $\sqrt[70]{((cd)^3y)^{\frac{70}{7}}}$

CLASES DE RADICALES

Radicales semejantes

Tienen la misma expresión subradical y el mismo índice.

Ejemplo:

Los radicales son semejantes: $-2\sqrt{5x}$; $7\sqrt{5x}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5x}$

Se observa que tienen la misma expresión subradical ($\sqrt{5x}$) y el mismo índice (2).

Radicales homogéneos

Se caracterizan por tener el mismo índice.

Ejemplos:

1. $\sqrt{5}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{b}$: son homogéneos de índice 2.
2. $\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[3]{a}$: son homogéneos de índice 3.

EFECTUAR

Grupo I

1. $\sqrt{100}$
2. $\sqrt{25}$
3. $\sqrt{121}$
4. $\sqrt{225}$
5. $\sqrt{81}$
6. $\sqrt[3]{27}$
7. $16^{\frac{3}{2}}$
8. $125^{\frac{2}{3}}$
9. $\sqrt[3]{64}$
10. $27^{\frac{2}{3}}$

Grupo II

1. $\sqrt{\frac{1}{25}}$
2. $\sqrt{\frac{9}{25}}$
3. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}}}$
4. $\sqrt[8]{\sqrt[3]{5^{48}}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$
6. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$
7. $\sqrt{16 \times 25}$
8. $\sqrt[3]{8 \times 27}$
9. $\sqrt[3]{16 \times 3}$
10. $\sqrt[3]{8 \times 2}$

Problemas resueltos



1 Halla x, siendo:
$3^{2x} = \sqrt{3^8}$

Resolución:

$3^{2x} = \sqrt{3^8}$

$3^{2x} = 3^{\frac{8}{2}} = 3^4$

$\Rightarrow \; 2x = 4$

$\therefore \; x = 2$

2 Si: $a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}; \quad b = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

Calcula: $V = a^3b - ab^3$

Resolución:

Nos piden:

$V = a^3b - ab^3 = ab(a+b)(a-b)$ ...(1)

Dato:

$a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}; \quad b = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ...(2)

$\Rightarrow ab = 1$ ...(3)

Reemplazamos (2) y (3) en (1):

$V = (a+b)(a-b)$

$\Rightarrow V = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

$V = \left(\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)\left(\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)$

$V = \dfrac{2(\sqrt{2}^2+1^2)(-4\sqrt{2.1})}{(\sqrt{2}^2-1^2)^2} = \dfrac{2.3(-4\sqrt{2})}{1}$

$\therefore \; V = -24\sqrt{2}$

3 Calcula:

$E = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 6\sqrt[3]{\dfrac{16}{81}} + 8\sqrt[3]{\dfrac{1}{12}} - 4\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} - \sqrt[3]{18}$

Resolución:

Dando forma:

$E = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 2.3\sqrt[3]{\dfrac{16}{81}} + 4.2\sqrt[3]{\dfrac{1}{12}} - 2.2\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} - \sqrt[3]{18}$

$E = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{\dfrac{16.27}{81}} + 4\sqrt[3]{\dfrac{8}{12}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}.8} - \sqrt[3]{18}$

$E = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{\dfrac{8.2}{3}} + 4\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{18}$

$E = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 4\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 4\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{18}$

$E = 9\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{18} = 3.3\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{18}$

$E = 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}.27} - 3\sqrt[3]{18}$

$E = 3\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{18} = 0$

4 Calcula: $A = \dfrac{\sqrt{8}\,.\,\sqrt{27}}{\sqrt{6}}$

Resolución:

Sabemos que: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$

Entonces:

$A = \dfrac{\sqrt{4.2}\,.\,\sqrt{9.3}}{\sqrt{2.3}}$

$A = \dfrac{\sqrt{4}\,.\,\cancel{\sqrt{2}}\,.\,\sqrt{9}\,.\,\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}\,.\,\cancel{\sqrt{3}}}$

$A = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{9} = 2\,.\,3$

$\therefore \; A = 6$

5 Calcula: $M = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{60}}}}$

Resolución:

Sabemos que: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$

Entonces: $M = \sqrt[2.3.5]{2^{60}} = \sqrt[30]{2^{60}}$

Por la propiedad del exponente fraccionario:

$M = 2^{\frac{60}{30}} = 2^2$

$\therefore \; M = 4$

6 Calcula: $\sqrt{\dfrac{16}{9}} + \sqrt{\dfrac{9}{16}} - 1$

Resolución:

$\sqrt{\dfrac{16}{9}} + \sqrt{\dfrac{9}{16}} - 1$

$\sqrt{\dfrac{4^2}{3^2}} + \sqrt{\dfrac{3^2}{4^2}} - 1$

$\dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{4} - 1 = \dfrac{16+9}{12} - 1 = \dfrac{13}{12}$

7 Halla $k^{\frac{3}{4}}$, si:

$\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

Resolución:

$\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\sqrt{2\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{4} + \sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\sqrt{\sqrt[6]{4}(2\sqrt[6]{2} + 1 + \sqrt[6]{4})} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\sqrt[12]{4}\Big(\underbrace{\sqrt{(\sqrt[6]{2})^2 + 2\sqrt[6]{2} + 1}}_{(\sqrt[6]{2}+1)^2}\Big) = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\sqrt[6]{2}(\sqrt[6]{2} + 1) = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[4]{k}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{k} = \sqrt[3]{2}$

$k^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(k^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 \qquad \therefore \; k^{\frac{3}{4}} = 2$

RACIONALIZACIÓN

Atención

Al factor racionalizante (FR) también se le llama conjugado del denominador.



CONCEPTO

Racionalizar el denominador o el numerador de una fracción es transformarla en otra fracción equivalente de denominador o numerador racional.
Lo más frecuente es racionalizar denominadores, para lo cual basta multiplicar los dos términos de una fracción por un número irracional convenientemente escogido llamado factor racionalizante.

Racionalización de denominadores de la forma: $\sqrt[a]{x^b};\ a > b$

Procedimiento

1. Determina el factor racionalizante (FR) que será de la forma: $\sqrt[a]{x^{a-b}}$
2. Multiplica al numerador y denominador de la fracción por el FR determinado en el procedimiento anterior.

Ejemplos:

I. Racionaliza el denominador: $A = \dfrac{15}{\sqrt[5]{10^3}}$

Resolución:

Procedimiento:

1. El factor racionalizante estará dado por: $\sqrt[5]{10^{5-3}} = \sqrt[5]{10^2} = FR$
2. Multiplicamos el numerador y denominador de A por el FR.

$$A = \frac{15}{\sqrt[5]{10^3}} = \frac{15}{\sqrt[5]{10^3}}\left(\frac{\sqrt[5]{10^2}}{\sqrt[5]{10^2}}\right) = \frac{15\sqrt[5]{10^2}}{10} = 1,5\sqrt[5]{10^2}$$

II. Racionaliza el denominador: $B(x;y;z) = \dfrac{101}{\sqrt[9]{x^3y^7z^2}}$

Resolución:

Procedimiento:

1. $FR = \sqrt[9]{x^{9-3}\ y^{9-7}\ z^{9-2}} = \sqrt[9]{x^6y^2z^7}$

2. $B(x;y;z) = \dfrac{101}{\sqrt[9]{x^3y^7z^2}} = \dfrac{101}{\sqrt[9]{x^3y^7z^2}}\left(\dfrac{\sqrt[9]{x^6y^2z^7}}{\sqrt[9]{x^6y^2z^7}}\right) = \dfrac{101\sqrt[9]{x^6y^2z^7}}{xyz}$

Recuerda

1. $\sqrt{x}; \sqrt{y}$: son radicales cuadráticos
2. Observa que la conjugada implica solo el cambio de signo:
   - $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ su conjugada es: $\sqrt{5} - \sqrt{7}$
   - $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ su conjugada es: $\sqrt{7} - \sqrt{5}$
   - $3 - \sqrt{2}$ su conjugada es: $3 + \sqrt{2}$
   - $\sqrt{10} + 7$ su conjugada es: $\sqrt{10} - 7$



Racionalización de denominadores de la forma: $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

Procedimiento

1. Determina el factor racionalizante (FR) que será la conjugada de $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ y tendrá la forma: $\sqrt{x} \mp \sqrt{y}$
2. Multiplica el numerador y denominador de la fracción por el FR determinado en el procedimiento anterior.

Ejemplos:

I. Racionaliza el denominador: $C = \dfrac{64}{\sqrt{7} - \sqrt{11}}$

Resolución:

Procedimiento:

1. El factor racionalizante (FR) es la conjugada del denominador: $\sqrt{7} + \sqrt{11}$
2. Multiplicamos el numerador y denominador de C por el FR.

$$C = \frac{64}{\sqrt{7} - \sqrt{11}} = \frac{64}{\sqrt{7} - \sqrt{11}}\left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{11}}{\sqrt{7} + \sqrt{11}}\right) = \frac{64(\sqrt{7} + \sqrt{11})}{7 - 11} = -16(\sqrt{7} + \sqrt{11})$$

II. Racionaliza el denominador: $D(x;y) = \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{y} - \sqrt{x}},\quad y - x \neq 0$

Resolución:

Procedimiento:

1. $FR = \sqrt{y} + \sqrt{x}$
2. $D(x;y) = \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}\right) = \dfrac{-\cancel{(y-x)}(x+y)(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\cancel{y-x}} = -(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

Nota

Si se tiene:

$\dfrac{M}{\sqrt[2m]{a} \pm \sqrt[2m]{b}}$ $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

Se multiplica el numerador y denominador por la "conjugada".

$\sqrt[2m]{a} \mp \sqrt[2m]{b}$

Problemas resueltos

1 Racionaliza: $\dfrac{64}{\sqrt[5]{2^3}}$

Resolución:

El factor racionalizante (FR) es:

$$\sqrt[5]{2^{5-3}} = \sqrt[5]{2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{64}{\sqrt[5]{2^3}}\underbrace{\left[\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}\right]}_{(FR)} = \frac{64\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{64\sqrt[5]{2^2}}{2}$$

$$\therefore \frac{64}{\sqrt[5]{2^3}} = 32\sqrt[5]{2^2}$$

2 Efectúa: $A = \dfrac{1}{\sqrt{10}-3} + 1 - \sqrt{10}$

Resolución:

El factor racionalizante es la conjugada del denominador:

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}-3}\cdot\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3} + 1 - \sqrt{10}$$

$$A = \frac{1(\sqrt{10}+3)}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)} + 1 - \sqrt{10}$$

$$A = \frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}^2 - 3^2} + 1 - \sqrt{10}$$

$$A = \frac{\sqrt{10}+3}{10-9} + 1 - \sqrt{10}$$

$$A = \sqrt{10} + 3 + 1 - \sqrt{10}$$

$$\therefore A = 4$$

3 Racionaliza: $\dfrac{4}{\sqrt[7]{x^2y^3z^5}}$

Resolución:

El factor racionalizante es:

$$\sqrt[7]{x^{7-2}y^{7-3}z^{7-5}} = \sqrt[7]{x^5y^4z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt[7]{x^2y^3z^5}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[7]{x^5y^4z^2}}{\sqrt[7]{x^5y^4z^2}}}_{(FR)} = \frac{4\sqrt[7]{x^5y^4z^2}}{\sqrt[7]{x^7y^7z^7}} = \frac{4\sqrt[7]{x^5y^4z^2}}{xyz}$$

$$\therefore \frac{4}{\sqrt[7]{x^2y^3z^5}} = \frac{4\sqrt[7]{x^5y^4z^2}}{xyz}$$

4 Reduce:

$$\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$$

Resolución:

$$\frac{2}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})}\cdot\frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})} + \frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})}\cdot\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})} - \frac{1}{(\sqrt{8}-\sqrt{7})}\cdot\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}+\sqrt{7})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{2} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1} - \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{1}$$

$$= \sqrt{8} - \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{8} - \sqrt{7} = 0$$

5 Reduce:

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{4}{3+\sqrt{5}}$$

Resolución:

El factor racionalizante es la conjugada del denominador:

$$\frac{2}{(3+\sqrt{7})}\cdot\frac{(3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})} + \frac{2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}\cdot\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \frac{4}{(3+\sqrt{5})}\cdot\frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(3-\sqrt{7})}{2} + \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} + \frac{4(3-\sqrt{5})}{4}$$

$$= 3 - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$$

6 Efectúa: $A = \dfrac{14}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}$

Resolución:

$$A = \frac{14}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}$$

$$A = \frac{14.\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}} - \sqrt{7} = \frac{14.\sqrt{7}}{7} - \sqrt{7}$$

$$A = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

7 Racionaliza: $\dfrac{32}{\sqrt[4]{2^3}}$

Resolución:

El factor racionalizante (FR) es:

$$\sqrt[4]{2^{4-3}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{32}{\sqrt[4]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{32\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{32}{\sqrt[4]{2^3}} = 16\sqrt[4]{2}$$

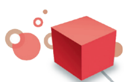
8 Racionaliza: $W = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{4}}$

Resolución:

$$W = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{4}}$$

$$W = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \therefore W = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO PLANTEO DE ECUACIONES



Recuerda

Una igualdad es una relación o comparación que nos indica que dos expresiones tienen el mismo valor.

- Por ejemplo:

$2x - 1 = x - 5$
$x - 6 = 9 - 2x$
$\frac{x}{3} + 7 = 4 + \frac{5x}{6}$

Atención

Existen dos clases de igualdades:

1. **Identidad** (igualdad absoluta) Es aquella que se verifica siempre, es evidente por sí misma.
   Veamos:
   $\underbrace{(x+3)^2}_{\text{Operación indicada}} \equiv \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{Resultado}}$
2. **Ecuación** (igualdad condicional) Es aquella que solo se verifica para valores particulares atribuidos de su incógnita, así:
   $3x - 1 = 2x + 6$, solo se verifica para $x = 7$.



Recuerda

En los diferentes casos de transposición de términos, se DESPEJÓ LA INCÓGNITA, esto es como se pudo apreciar; hacer los procedimientos necesarios con la idea de que la incógnita aparezca sola.

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

Es la igualdad de dos expresiones algebraicas que se verifica para valores particulares atribuidos a su única incógnita.

Ejemplo: $\underbrace{5x - 3}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{3x + 1}_{2.^{\circ}\text{ miembro}}$

Se verifica solo para: $x = 2$

SOLUCIÓN O RAÍZ DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es un valor que toma la incógnita que reemplazando en la ecuación original, se obtiene una igualdad numérica.

Ejemplo: $10x + 1 = 7x + 13$

Es una igualdad que se cumple para: $x = 4$ (solución o raíz)
En efecto, si sustituimos la variable "x" por "4", tenemos: $10(4) + 1 = 7(4) + 13$
$41 = 41$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO (ECUACIÓN LINEAL)

Una ecuación de primer grado con una incógnita, es aquella que puede reducirse a la siguiente forma general:

$\boxed{ax + b = 0}$; $a \neq 0$; cuya solución o raíz es: $\boxed{x = -\frac{b}{a}}$

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

De la ecuación: $71x + 3 = 21x - 7$
Al pasar los términos de un miembro a otro el símbolo de la igualdad (=) permite establecer la operación inversa de la inicial.

Explicamos:

Si un término esta sumando, pasa al otro miembro restando. Ejemplo:

- $x + 9 = 10 \Rightarrow x = 10 - 9$
  $\Rightarrow x = 10 - 9 = 1$

Si un término está multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo. Ejemplo:

- $7x = -21 \Rightarrow x = -\frac{21}{7} \Rightarrow x = -\frac{21}{7} = -3$

Si un término está como exponente, pasa al otro miembro como índice de un símbolo radical. Ejemplo:

- $x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1}$; $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 1$

Si un término está restando, pasa al otro miembro sumando. Ejemplo:

- $x - 10 = -15 \Rightarrow x = -15 + 10$
  $\Rightarrow x = -15 + 10 = -5$

Si un término está dividiendo, pasa al otro miembro multiplicando. Ejemplo:

- $\frac{x}{8} = 3 \Rightarrow x = 3 . 8 \Rightarrow x = 3 . 8 = 24$

Si un término está como índice de un símbolo radical, pasará al otro miembro como exponente. Ejemplo:

- $\sqrt[4]{x} = 2 \Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$

Para resolver ecuaciones sigue estos pasos:

Paso 1: desarrollar las diferentes operaciones indicadas relacionadas con la variable en este orden: 1.° Potenciación, 2.° División, 3.° Multiplicación, 4.° Adición y 5.° Sustracción. Teniendo cuidado con los signos negativos que lo anteceden.

Paso 2: reducir los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.

Paso 3: aplicar la transposición de términos (es recomendable tener a la incógnita en el primer miembro).

Paso 4: volver a reducir términos semejantes, luego despejar la variable para su respectiva cálculo.



Ejemplos:

1. Resuelve la siguiente ecuación de coeficientes enteros:
$8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$

Resolución:
Paso 1: $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
Paso 2: $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
$11x - 4 = 8x + 14$
Paso 3: $11x - 8x = 14 + 4$
Paso 4: $11x - 8x = 14 + 4$
$3x = 18$
$\Rightarrow x = 6$

2. Resuelve la siguiente ecuación de coeficientes fraccionarios:
$$x + \frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{2} = \frac{x+4}{2} + 5$$

Resolución:
Paso 1: el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores es 4.
$$4\left(\frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{2} + x\right) = 4\left(\frac{x+4}{2} + 5\right)$$
$x - 1 - 2(x + 3) + 4x = 2(x + 4) + 20$
Paso 2: $3x - 7 = 2x + 28$
Paso 3: $3x - 2x = 28 + 7$
Paso 4: $\Rightarrow x = 35$

PLANTEO DE ECUACIONES

Ten en cuenta los diferentes significados de nuestro vocablo matemático, deducidos a partir de diferentes palabras:

1. De; del; de la; de los. Significa producto.

Ejemplos:

I. El doble de un número $\Rightarrow 2x$
(El doble = 2; de = . ; un número = x)

II. El séxtuple de la mitad de un número $\Rightarrow 6\left(\frac{1}{2}\right)x$
(El séxtuple = 6; de = . ; la mitad = $\frac{1}{2}$; de = . ; un número = x)

2. Es; son; en; será; sea; queda; obtiene; tiene; tendrá. Significa igualdad.

Ejemplos:

I. La tercera parte de un número es la sexta parte de 120.
($\frac{1}{3}$. N = $\frac{1}{6}$. 120)
Esto quedaría así: $\frac{1}{3}N = \frac{1}{6}(120)$

3. Veces. Significa producto.

Ejemplo:
La edad de Pedro es 5 veces la edad de su hijo.
(P = 5. H)
Esto quedaría así: $P = 5H$

4. Mayor que; más que. Significa suma.

Ejemplos

I. Un ángulo es mayor que otro en 10°.
(θ = + α 10°)
Esto quedaría así: $\theta = \alpha + 10°$

II. Un ángulo es 20° más que el doble de otro.
(β = 20° + 2ϕ)
Esto quedaría así: $\beta = 20° + 2\phi$

5. Menos que. Significa una cantidad tiene menos que otra.

Ejemplo:
Cierto ángulo es 10° menos que el doble de otro ángulo.
(γ = 10° – 2 . θ)
Esto quedaría así: $\gamma = 2\theta - 10°$

6. Es a; es al. Significa división entre dos cantidades.

Ejemplo:
El doble de un número es al triple de su cuadrado como 10 es a 18.
(2x ÷ 3 . x^2 = 10 / 18)
Esto quedará así: $\frac{2x}{3x^2} = \frac{10}{18}$ o también: $\frac{2x}{10} = \frac{3x^2}{18}$

Atención

Las ecuaciones se clasifican de acuerdo a su estructura algebraica, como:

- Ecuación polinomial:
$x^5 - x^2 + 3x + 1 = 0$
- Ecuaciones fraccionarias:
$\frac{3}{3x^2+1} + \frac{10}{x-1} = 0$
- Ecuaciones irracionales:
$\sqrt{20x^2+1} + \sqrt{5x-1} = 0$
- Ecuaciones trascendentes:
$7^{x-1} + 7^{x-3} = 10$



Observación

Considera las traducciones del lenguaje escrito al lenguaje matemático:

- El doble de un número
(2 . N)
aumentado en 20 nos da 30.
(+ 20 = 30)
Esto quedaría así:
$2(N + 20) = 30$
- El doble de un número,
(2 . N)
aumentado en 20 nos da 30.
(+ 20 = 30)
Esto quedará así:
$2N + 20 = 30$



Problemas resueltos

1 Resuelve:
$9x + 4 = 2(4x + 9)$

Resolución:

$9x + 4 = 8x + 18 \Rightarrow 9x - 8x = 18 - 4$
$x = 18 - 4$
$\therefore\ x = 14$

2 Resuelve:
$2\sqrt{2}x - 2x = 0$

Resolución:

$(2\sqrt{2} - 2)x = 0$, como: $2\sqrt{2} - 2 \neq 0 \Rightarrow x = 0$

3 Resuelve:
$4x - (3x + 9) = (x + 2) - (2x - 1)$

Resolución:

$4x - 3x - 9 = x + 2 - 2x + 1 \Rightarrow x - 9 = -x + 3$

$x + x = 9 + 3 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2}$

$\therefore\ x = 6$

4 Resuelve:
$6x - 3(1 - x) = 8(x + 2)$

Resolución:

$6x - 3 + 3x = 8x + 16 \Rightarrow 9x - 3 = 8x + 16$

$9x - 8x = 16 + 3 \quad \therefore\ x = 19$

5 Resuelve:
$\frac{x - a}{x - b} = \frac{b}{a}$

Resolución:

$\frac{x - a}{x - b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a(x - a) = b(x - b)$

$ax - a^2 = bx - b^2 \Rightarrow ax - bx = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a - b)x = (a + b)(a - b)$
$\Rightarrow x = a + b$

6 Resuelve:
$\frac{a - x}{b - x} = \frac{a^2}{b^2}$

Resolución:

$\frac{a - x}{b - x} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow b^2(a - x) = a^2(b - x)$

$b^2a - b^2x = a^2b - a^2x \Rightarrow a^2x - b^2x = a^2b - ab^2$

$x(a + b)(a - b) = ab(a - b)$

$\Rightarrow x = \frac{ab}{a + b}$

7 Resuelve:
$(3x - 5)6 + 12 = 36$

Resolución:

$18x - 30 + 12 = 36 \Rightarrow 18x - 18 = 36$
$18x = 36 + 18 \Rightarrow 18x = 54 \Rightarrow x = 3$

8 Halla el valor de x:
$2(x - 3) - 23 + 22 = 18 - 3$

Resolución:

$2(x - 3) - 23 + 22 = 18 - 3 \Rightarrow 2x - 6 - 1 = 15$
$2x = 22 \Rightarrow x = 11 \qquad \therefore CS = \{11\}$

9 Tengo 100 lapiceros y regalo $\frac{1}{4}$ de lo que no regalo. ¿Cuántos lapiceros he regalado?

Resolución:

Tengo: 100
Regalo: x
No regalo: 100 – x
Como lo que regalo es $\frac{1}{4}$ de lo que no regalo, entonces:

$x = \frac{1}{4}(100 - x)$
$\Rightarrow 4x = 100 - x$
$5x = 100$
$x = 20$
$\therefore$ He regalado 20 lapiceros.

10 Un cuaderno de 100 hojas pesa **p** gramos y un libro de matemáticas pesa **m** gramos. ¿Cuántos libros de matemáticas pesan tanto como **s** cuadernos de 100 hojas?

Resolución:

	Cuaderno	Libro de matemáticas
Peso:	p	m

Del enunciado: $\underbrace{x \cdot m}_{\text{peso 1}} = \underbrace{s \cdot p}_{\text{peso 2}}$

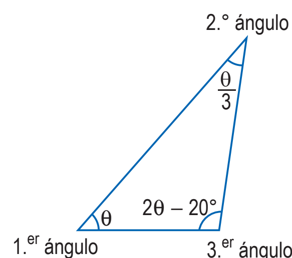
$\therefore x = \frac{s.p}{m}$

11 El segundo ángulo de un triángulo mide la tercera parte del valor del primer ángulo. El tercer ángulo mide el doble del primero menos 20°. Calcula las medidas de los ángulos.

Resolución:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°:
$\theta + (2\theta - 20°) + \frac{\theta}{3} = 180° \Rightarrow \theta = 60°$

Luego, los ángulos serán:
1.er ángulo: $\theta = 60°$
2.° ángulo: $\theta/3 = 20°$
3.er ángulo: $2\theta - 20° = 100°$



SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES



DEFINICIONES PREVIAS

Matriz

Es aquel arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & x & 4 \\ \sqrt{7} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \text{Filas}$$

↓ ↓ ↓ Columnas

- Es una matriz de orden 2×3, porque tiene 2 filas y 3 columnas.
- En la primera fila y primera columna aparece el número 3.
- En la segunda fila y segunda columna aparece el número 2.
- En la segunda fila y primera columna, aparece la $\sqrt{7}$.

Observación

- A las matrices se les denota con letra mayúscula y se les encierra entre paréntesis o corchetes.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 5 & -5 & 31 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 5 & -5 & 31 \end{bmatrix}$$

- Una matriz por ser un arreglo rectangular no posee valor numérico.



Matriz cuadrada

Es aquella matriz donde el número de filas es igual al número de columnas.
Este concepto de orden también se extiende a los determinantes.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

- Es una matriz de orden 2×2 o simplemente es una matriz de orden 2.

Determinante

Es una función que aplicada a una matriz cuadrada nos proporciona un número real. Se le representa encerrando los elementos de la matriz entre dos barras verticales.
Se denota: $|A|$, $D(A)$ o $Det(A)$.

Desarrollo de un determinante de orden 2

De la matriz de orden 2:

$$\text{Sea: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

con signo cambiado (–)
$= ad - bc$
con su propio signo (+)

$$|A| = ad - bc$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ x & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = x(-2) - 5(x) = -2x - 5x = -7x$$

Atención

A las propiedades:

- Si dos líneas (filas o columnas) de una matriz son proporcionales, su determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(4) = 0$$

- Sean A y B dos matrices cuadradas, luego:

$$|AB| = |A||B|$$



Sistema de ecuaciones lineales

Se denomina así al conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, cuya solución es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

$x + 6y = 27$ ...(1)
$7x - 3y = 9$ ...(2)

- Forma un sistema de dos ecuaciones lineales (primer grado) con dos incógnitas.
- Su solución se verifica simultáneamente para $x = 3 \wedge y = 4$.

Recuerda

CONJUNTO SOLUCIÓN, es el conjunto de valores que toman las incógnitas para los cuales se verifica el sistema.
Del ejemplo:

$x + 6y = 27$
$7x - 3y = 9$

$CS = \{(3; 4)\}$



MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1. Método de sustitución

Ejemplo:
Resueve el sistema:

$x + 3y = 6$ ...(1)
$5x - 2y = 13$ ...(2)

Resolución:
Seguir los siguientes pasos:

1. **Despejar cualquiera de las incógnitas:** despejando x de la ecuación (1).
2. **Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación** y resolver la ecuación obtenida: reemplazar (3) en (2).
3 **Sustituir la solución obtenida en la expresión de la otra incógnita:** reemplazar (4) en (3).

$x = 6 - 3y$ ...(3)
$5x - 2y = 13$
$5(6 - 3y) - 2y = 13 \Rightarrow y = 1$ ...(4)
$x = 6 - 3(1)$
$x = 3$

2. Método de igualación

Ejemplo:
Resuelve el sistema:

$x + 2y = 3$ ...(1)
$5x - 3y = 2$ ...(2)

Resolución:
Seguir los siguientes pasos:

1. **Despejar de las ecuaciones la misma variable:** en este caso despejamos x de las ecuaciones.

$x = 3 - 2y$ ...(3)

$x = \dfrac{2 + 3y}{5}$ ...(4)

2. **Igualar las dos expresiones de la variable despejada y resolver la ecuación obtenida**: igualamos (3) y (4).

$3 - 2y = \dfrac{2 + 3y}{5}$

$15 - 10y = 2 + 3y$

$13 = 13y \Rightarrow y = 1$ ...(5)

3. **Sustituir la solución obtenida en cualquiera de las expresiones de la otra incógnita:** reemplazando (5) en (3).

$x = 3 - 2(1)$

$x = 1$

Observación

- El método más usado y más rápido es el método de reducción.
- En el método de reducción, se elige una variable y se trata de eliminarla haciendo operaciones.



3. Método de reducción

Ejemplo:
Resuelve el sistema:

$5x + 6y = 20$ ...(1)
$4x - 3y = -23$ ...(2)

Resolución:
Seguir los siguientes pasos:

1. **Multiplicar los dos miembros de las dos ecuaciones por ciertos números, de tal forma que los coeficientes de una incógnita sean opuestos:** multiplicamos la ecuación (2) por 2.

$2(4x - 3y) = (-23)2$

$8x - 6y = -46$ ...(3)

2. **Sumar las dos ecuaciones miembro a miembro y resolver la ecuación obtenida:** sumamos las ecuaciones (1) y (3).

$5x + 6y + 8x - 6y = 20 - 46$

$13x = -26$

$x = -2$ ...(4)

3. **Sustituir la solución obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y calcular la otra incógnita:** reemplazamos (4) en (1):

$5(-2) + 6y = 20$

$-10 + 6y = 20$

$6y = 30$

$y = 5$

Recuerda

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Ejemplos:

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(7) - 2(3) = 1$

$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - (-1)0 = 8$



ECUACIÓN MATRICIAL

Es aquella ecuación donde la incógnita es una matriz.
Es de la forma:

$AX = C$

Donde:
X: matriz incógnita
A y C: matrices cuya determinante son constantes.

Ejemplo:
Examen de admisión UNI 2010–I (matemática)
Considera la ecuación matricial:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$, donde X es una matriz.

Halla la Det(x).

Resolución:

- Aplicamos la propiedad: $|A . B| = |A| . |B|$
- De la ecuación matricial: $X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Tomando determinantes miembro a miembro: $|X|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$|X|.(1) = 8$

$|X| = 8$

$\therefore\ Det(X) = |X| = 8$

Problemas resueltos



1 Determina el valor de:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{Si: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 10$$

Resolución:

Del dato:

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 10$

Nos piden:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} \end{vmatrix}$$

$= (a_{11}+a_{12})(a_{21}-a_{22}) - (a_{21}+a_{22})(a_{11}-a_{12})$

$= (a_{11}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - a_{12}a_{22})$

$- (a_{21}a_{11} - a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} - a_{22}a_{12})$

$= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

$= -2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -2(10) = -20$

2 Calcula x en: $x + 2y = 7$
$2x + 5y = 17$

Resolución:

Resolveremos este problema por el método de sustitución:

Del sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 & \text{...(1)} \\ 2x + 5y = 17 & \text{...(2)} \end{cases}$

Despejamos cualquiera de las incógnitas, sea x en la ecuación (1):
$x + 2y = 7 \Rightarrow x = 7 - 2y$, este valor se reemplaza en la ecuación (2):

$2(7 - 2y) + 5y = 17$

$14 - 4y + 5y = 17 \Rightarrow y = 17 - 14$

$y = 3$

Sustituimos $y = 3$, en cualquiera de las ecuaciones dadas, sea en la ecuación (1):

$x + 2y = 7 \Rightarrow x + 2(3) = 7$

$x = 7 - 6 \quad \therefore x = 1$

3 Resuelve: $\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 3y = 19 \end{cases}$

Resolución:

Resolveremos el sistema por el método de sustitución:

Del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 13 & \text{...(1)} \\ x + 3y = 19 & \text{...(2)} \end{cases}$

Despejamos x de la ecuación (2):

$x + 3y = 19 \Rightarrow x = 19 - 3y$

Reemplazamos este valor en la ecuación (1):

$3(19 - 3y) - 2y = 13 \Rightarrow 57 - 9y - 2y = 13$

$\Rightarrow -11y = 13 - 57 \Rightarrow -11y = -44$

$y = 4$

Sustituimos $y = 4$; en la ecuación (1):

$3x - 2(4) = 13 \Rightarrow 3x - 8 = 13$

$3x = 21 \Rightarrow x = 7$

Por lo tanto:

$x = 7 \wedge y = 4$

4 Resuelve: $x + 3y = 14$
$2x + y = 13$

Resolución:

Aplicaremos el método de igualación:

Del sistema : $\begin{cases} x + 3y = 14 & \text{...(1)} \\ 2x + y = 13 & \text{...(2)} \end{cases}$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

Ecuación (1): $x + 3y = 14 \Rightarrow x = 14 - 3y$

Ecuación (2): $2x + y = 13 \Rightarrow x = \dfrac{13 - y}{2}$

Luego se igualan entre sí los dos valores de x:

$14 - 3y = \dfrac{13 - y}{2} \Rightarrow 28 - 6y = 13 - y$

$28 - 13 = -y + 6y \Rightarrow 15 = 5y \Rightarrow y = 3$

Reemplazando $y = 3$, en la ecuación (1):

$x + 3(3) = 14 \Rightarrow x = 14 - 9 \Rightarrow x = 5$

Por lo tanto: $x = 5 \wedge y = 3$

5 Resuelve el sistema en x e y:
$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - a + 5 = 0 \end{cases}$ y luego halla el mayor valor entero de y, si: $a \subset \mathbb{R}^+$.

Resolución:

Del sistema:

$x + 2y - 3 = 0 \quad$ ...(I)

$x - a + 5 = 0 \quad$ ...(II)

Restando (I) y (II) tenemos:

$2y + a - 8 = 0$

$y = \dfrac{8 - a}{2}$

Como piden el mayor valor entero de y: $a = 2$, $a \in \mathbb{R}^+$.

Luego:

$y_{máx.} = \dfrac{8 - 2}{2} = 3$

6 Resuelve: $x - 3y = 4$
$2x + y = 22$

Resolución:

Resolveremos este problema por el método de reducción:

Del sistema : $\begin{cases} x - 3y = 4 & \text{...(1)} \\ 2x + y = 22 & \text{...(2)} \end{cases}$

Multiplicamos la ecuación (2) por 3. Tenemos el nuevo sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y = 4 \\ 6x + 3y = 66 \end{array}\right\} \text{sumamos}$$

$7x = 70 \Rightarrow x = 10$

Reemplazamos en la ecuación (1): $10 - 3y = 4$

$\Rightarrow y = 2$

Por lo tanto: $x = 10 \wedge y = 2$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

Nota

De la ecuación:
$ax^2 + bx + c = 0$
- "a" es el coeficiente principal.
- Estas ecuaciones se caracterizan por poseer dos raíces x_1 y x_2, de este modo presenta como conjunto solución (CS): $CS = \{x_1; x_2\}$

CONCEPTO

Las ecuaciones de segundo grado son todas aquellas ecuaciones de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

Donde: ax^2: término cuadrático.
bx: término lineal.
c: término independiente.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Por factorización

1. De la forma: $ax^2 + c = 0$

Ejemplo:
$x^2 - 49 = 0$

Factorizando: $(x + 7)(x - 7) = 0$
$x + 7 = 0 \lor x - 7 = 0$
$x_1 = -7 \lor x_2 = 7$
$\therefore CS = \{-7; 7\}$

2. De la forma: $ax^2 + bx = 0$

Ejemplo:
$9x^2 + x = 0$

Factorizando: $x(9x + 1) = 0$
$x = 0 \lor 9x + 1 = 0$
$x_1 = 0 \lor x_2 = -\frac{1}{9}$
$\therefore CS = \left\{-\frac{1}{9}; 0\right\}$

Atención

- Para la resolución de ecuaciones de 2.° grado por el método de la factorización, se emplea el siguiente procedimiento:

$A . B = 0$
$A = 0 \lor B = 0$

De A y B se obtienen las soluciones igualando cada factor a cero.

3. De la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ (factorización por aspa simple)

Ejemplo:

I. Resuelve: $x^2 - 6x - 16 = 0$

$x \quad +2 \quad 2x$
$x \quad -8 \quad -8x$
$\qquad\qquad -6x$

$(x + 2)(x - 8) = 0$
$x + 2 = 0 \lor x - 8 = 0$
$x_1 = -2 \lor x_2 = 8$
$\therefore CS = \{-2; 8\}$

II. Resuelve: $21x^2 - 20x - 9 = 0$

$3x \quad +1 \quad 7x$
$7x \quad -9 \quad -27x$
$\qquad\qquad -20x$

$(3x + 1)(7x - 9) = 0$
$3x + 1 = 0 \lor 7x - 9 = 0$
$x_1 = -\frac{1}{3} \lor x_2 = \frac{9}{7}$
$\therefore CS = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{9}{7}\right\}$

Por fórmula general

Sea: $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo:
- Determina el conjunto solución de:
$2x^2 + 15x + 7 = 0$
- Identifiquemos los coeficientes:
$a = 2; b = 15; c = 7$
- Reemplazamos en la fórmula general:
$x_{1;2} = \frac{-15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(2)(7)}}{2(2)}$

$x_{1;2} = \frac{-15 \pm 13}{4}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-15 + 13}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-15 - 13}{4} = -7 \end{cases}$

$\therefore CS = \left\{-7; -\frac{1}{2}\right\}$

Observación

A la constante $(b^2 - 4ac)$ se le denomina:
DISCRIMINANTE
es representado por:
$\Delta = b^2 - 4ac$
Además, si $\Delta > 0$ la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

PLANTEO DE ECUACIONES

Ejemplos con datos numéricos

1. Sea $3x + 1$ la altura de un rectángulo. La base de dicho rectángulo excede a la altura en $2x + 4$, sabiendo que su área es 105 m^2, determina sus dimensiones.

Resolución:
- Según el enunciado del ejemplo:

105 m^2 | $3x + 1$ | $5x + 5$



- La región rectangular se determina como:
  (Base)(Altura) = Área
  $(5x+5)(3x+1)=105$
  $(x+1)(3x+1)=21$
  $3x^2+4x-20=0$
  $3x \quad +10 \rightarrow 10x$
  $x \quad -2 \rightarrow -6x$
  $4x$
  $\Rightarrow x=2$

- Las dimensiones serán.
  Base $= 5x+5 = 5(2)+5 = 15$ m
  Altura $= 3x+1 = 3(2)+1 = 7$ m

Observación

En el rectángulo la base excede a la altura en $2x+4$.
Base = Altura + $(2x+4)$
$= 3x+1+2x+4$
Base $= 5x+5$



2. El producto de dos números consecutivos impares es 15. Determina la suma de dichos números.

Resolución:
- Sean los números consecutivos impares:
  $2x-1$ y $2x+1$
  (menor) (mayor)
- Del enunciado su producto es 15:
  $(2x-1)(2x+1)=15$
  $4x^2-1=15$
  $x=2$
- La suma de dichos números es:
  $(2x-1)+(2x+1)=4x$
  $=4(2)$
  $=8$

* **Otra representación de los números impares consecutivos:**
  $x \wedge x+2$ / x: impar
- Por condición:
  $x(x+2)=15$
  $\Rightarrow x^2+2x-15=0$
  $\Rightarrow (x+5)(x-3)=0$, de donde $x=3$
- La suma de los números es:
  $2x+2=8$

Nota

Cada factor de la ecuación del ejemplo1, se iguala a cero:
$3x^2+4x-20=0$
$(3x+10)(x-2)=0$
$x=\frac{-10}{3} \vee x=2$
(No es posible)

3. Arleth es dos años mayor que Sarah y la suma de los cuadrados de ambas edades es 74 años. Determina ambas edades.

Resolución:
- Sea:
  A: la edad de Arleth
  A – 2: la edad de Sarah
- Según el enunciado:
  $A^2+(A-2)^2=74$
  $A^2+A^2-4A+4=74$
  $2A^2-4A-70=0$

$A^2-2A-35=0$
$(A-7)(A+5)=0$
$A=7 \vee A=-5$

Se rechaza la solución $A=-5$, ya que la edad de Arleth no puede ser – 5 años, se considera $A=7$. Luego, Arleth tiene 7 años y Sarah tiene $A-2=5$ años.

Recuerda

- Diferencia de cuadrados:
  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
  $(2x-1)(2x+1)=(2x)^2-1$
  $=4x^2-1$
- Además:
  $x^2=4$
  $x=\pm 2$
  $x=-2 \vee x=2$



EFECTUAR

Grupo I

Resuelve:

1. $x^2-x-2=0$
2. $x^2+3x-4=0$
3. $x^2-2x-3=0$
4. $x^2+2x-3=0$
5. $x^2+5x+6=0$
6. $x^2+8x-9=0$
7. $x^2-6x-7=0$
8. $x^2+6x-7=0$
9. $x^2-9x-10=0$
10. $x^2-3x+1=0$

Grupo II

Resuelve:

1. $(x+2)(x-3)=0$
2. $(x-4)(x-5)=0$
3. $(x-7)(x+4)=0$
4. $(3x+1)(x-2)=0$
5. $(2x+3)(2x-3)=0$
6. $x^2-4=0$
7. $x^2+3x+2=0$
8. $x^2+3x-1=0$
9. $x^2-9=0$
10. $x^2-16=0$

Problemas resueltos

1 Resuelve: $x^2 - 4x + 3 = 0$ e indica la mayor raíz.

Resolución:

Factorizamos por aspa simple:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x \quad -3 \quad -3x$

$x \quad -1 \quad -x$ } sumar

$-4x$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$

$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$

$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = 1$

∴ La mayor raíz es: 3

2 Resuelve:

$x^2 - 9 = 0$

Resolución:

$x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$ (El 9 pasa sumando:

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Entonces: $x_1 = -3 \ \vee \ x_2 = 3 \qquad \therefore\ CS = \{-3; 3\}$

3 Resuelve:

$x^2 - 2x - 2 = 0$

Resolución:

Cuando una ecuación de segundo grado no se puede factorizar por aspa simple se emplea la fórmula general:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Para este problema, $a = 1$; $b = -2$ y $c = -2$

Reemplazamos:

$$x_{1;2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (4)(1)(-2)}}{2.1}$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Entonces: $x_1 = 1 - \sqrt{3} \quad \vee \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}$

$\therefore CS = \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$

4 Resuelve: $x^2 + 2x - 1 = 0$ e indica la mayor raíz.

Resolución:

Usamos fórmula general donde: $a = 1$; $b = 2$ y $c = 1$

Reemplazamos:

$$x_{1;2} = \frac{-(2) \pm \sqrt{2^2 - (4)(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Entonces:

$x_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}$

∴ La mayor raíz es: $\sqrt{2} - 1$

5 Halla el conjunto solución de:

$3x^2 + x - 10 = 0$

Resolución:

$3x^2 + x - 10 = 0$

$3x \quad -5$

$x \quad 2$

$(3x - 5)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow \ 3x - 5 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$

$x = \frac{5}{3} \quad \vee \quad x = -2$

$CS = \left\{-2; \frac{5}{3}\right\}$

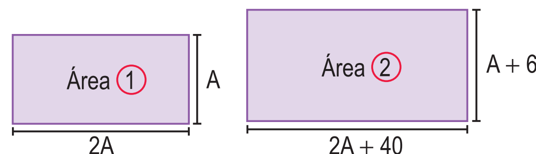
6 La longitud de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica. Halla las dimensiones del terreno.

Resolución:

Asumimos: A el ancho del terreno

2A la longitud del terreno

Del enunciado:



Área(2) = 2 Área(1)

(Base × Altura)(2) = 2 (Base × Altura)(1)

$(2A + 40)(A + 6) = 2(2A)(A)$

$2(A + 20)(A + 6) = 2(2A)(A)$

$A^2 + 26A + 120 = 2A^2$

$A^2 - 26A - 120 = 0$

$(A - 30)(A + 4) = 0 \Rightarrow A = 30 \vee A = -4$

Se acepta $A = 30$ (ancho) $\Rightarrow 2A = 60$ (longitud)

7 Al resolver la ecuación: $2x^2 - 4x + 8 = 5x^2 + 2x - 5$, el valor de $x_{1;2}$ toma la forma: $a \pm \frac{4}{3}\sqrt{b}$.

Indica el valor de: $a + b$

Resolución:

$2x^2 - 4x + 8 = 5x^2 + 2x - 5$

$3x^2 + 6x - 13 = 0$

Por fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(3)(-13)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 8\sqrt{3}}{6} = -1 \pm \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Dato:

$x = a \pm \frac{4}{3}\sqrt{b}$

Luego, tenemos:

$a = -1 \quad \wedge \quad b = 3$

Nos piden:

$a + b = -1 + 3 = 2$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDAD

Se denomina desigualdad a la relación de orden que se establece entre dos cantidades que poseen diferente valor.

Axiomas de orden

1. Ley de la tricotomía

Siendo a y b, reales una y solo una de las siguientes sentencias es válida.

$a < b \lor a = b \lor a > b$

2. Ley aditiva

Si $a < b \land c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $a \pm c < b \pm c$

3. Ley multiplicativa

Si $a < b \land c > 0 \Rightarrow$ $ac < bc$

Si $a < b \land c < 0 \Rightarrow$ $ac > bc$

4. Ley de la división

Si $a > b \land c > 0 \Rightarrow$ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Si $a > b \land c < 0 \Rightarrow$ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

5. Ley transitiva

Si $a < b \land b < c \Rightarrow$ $a < c$

Definiciones

A) Se define que UN NÚMERO ES MAYOR QUE OTRO si y solo sí su diferencia es un número positivo.

De los números M, N donde:

$M > N \iff M - N > 0$

Ejemplos:

- $9 > 2 \iff 9 - 2 > 0$ $(9 - 2 = 7) \iff 7 > 0$
- $3 > -3 \iff 3 - (-3) > 0$ $(3 - (-3) = 6) \iff 6 > 0$

B) Se define que UN NÚMERO ES MENOR QUE OTRO si y solo si su diferencia es un número negativo.

De los números M, N donde:

$M < N \iff M - N < 0$

Ejemplos:

- $10 < 13 \iff 10 - 13 < 0$ $(10 - 13 = -3) \iff -3 < 0$
- $-5 < -1 \iff -5 - (-1) < 0$ $(-5 - (-1) = -4) \iff -4 < 0$

INTERVALOS

Es aquel subconjunto de los números reales que define un conjunto de valores entre dos límites, inferior y superior.

Existen dos tipos de intervalos:

Intervalo acotado

Es aquel cuyos extremos son números reales (límites finitos), se presentan como:

I. Intervalo cerrado

En este caso se consideran a los extremos finitos.



$x \in [a; b] \iff a \leq x \leq b$; $a < b$

II. Intervalo abierto

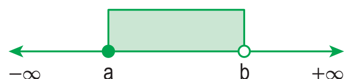
En este caso no se consideran a los extremos finitos.



$x \in \langle a; b \rangle \iff a < x < b$; $a < b$

III. Intervalo semiabierto por la derecha

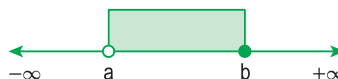
(cerrado en "a" y abierto en "b")



$x \in [a; b\rangle \iff a \leq x < b$; $a < b$

IV. Intervalo semiabierto por la izquierda

(abierto en "a" y cerrado en "b")



$x \in \langle a; b] \iff a < x \leq b$; $a < b$

Nota

- Los símbolos de las relaciones de orden son representados como:

$>$ "mayor que", $<$ "menor que" } estrictas

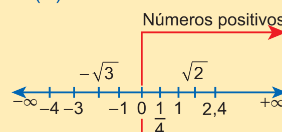
$\geq$ "mayor o igual que", $\leq$ "menor o igual que" } NO estrictas

- El símbolo $\forall$ significa en términos matemáticos:

$\forall$: para todo

Recuerda

- La siguiente gráfica es la recta de los números reales ($\mathbb{R}$):



Donde:

$+\infty$: más infinito

$-\infty$: menos infinito

- Aquel número mayor que el cero se denomina NÚMERO POSITIVO.

$a > 0$

- Aquel número menor que el cero se denomina NÚMERO NEGATIVO.

$b < 0$



Nota

- Cierto número M es MENOR O IGUAL QUE otro N si:

$M \leq N \iff (M < N \lor M = N)$

- Cierto número M es MAYOR O IGUAL QUE otro N si:

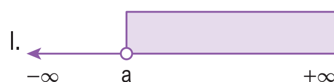
$M \geq N \iff (M > N \lor M = N)$

- A los intervalos que usan el símbolo $\rangle$ o $\langle$ también se les representa como] o [, respectivamente.

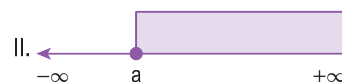


Intervalo no acotado

Es aquel en donde por lo menos, uno de sus extremos es el límite: $+\infty$ o $-\infty$.

I.


$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

II.


$[a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

III.


$\langle -\infty; a\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

IV.


$\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

V.


$\langle -\infty, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < +\infty\}$

Nota

La propiedad 1 también verifica cuando se extrae una raíz de índice impar.

$\forall c, d \in \mathbb{R}$ y n (impar)

$c > d \Longleftrightarrow \sqrt[n]{c} > \sqrt[n]{d}$

Así:

$-8 < 216 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{216}$

$\Longleftrightarrow -2 < 6$

Nota

La propiedad 2 también se cumple cuando extraemos raíces de índices de números enteros positivos.

$\forall c, d \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

$c < d \Longleftrightarrow \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{d}$

Así:

$9 > 4 \Longleftrightarrow \sqrt{9} > \sqrt{4} \Longleftrightarrow 3 > 2$

Atención

Todo número diferente de cero, elevado al cuadrado es positivo:

$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

$a \neq 0 \Rightarrow a > 0 \vee a < 0$

- $\forall a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$
- $\forall a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$
- $\forall a \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$



PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1. Si elevamos los miembros de una desigualdad a un exponente impar positivo; el sentido de esta no cambia.

   $\forall a; b \in \mathbb{R}$ y n (impar) $\in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

   $a < b \Longleftrightarrow a^n < b^n$

   Ejemplos:
   - $5 > -2 \Longleftrightarrow 5^3 > (-2)^3 \Longleftrightarrow 125 > -8$
   - $-8 < -3 \Longleftrightarrow (-8)^3 < (-3)^3 \Longleftrightarrow -512 < -27$

2. Si los miembros de una desigualdad son números positivos y estos los elevamos a un exponente entero y positivo el sentido de la desigualdad no cambia.

   $\forall a; b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

   $a > b \Longleftrightarrow a^n > b^n$

   Ejemplos:
   - $3 > 1 \Longleftrightarrow 3^2 > 1^2 \Longleftrightarrow 9 > 1$
   - $9 > 3 \Longleftrightarrow 9^4 > 3^4 \Longleftrightarrow 6561 > 81$
   - $4 < 7 \Longleftrightarrow 16 < 49$

3. Si los miembros de una desigualdad son números negativos y estos los elevamos a un exponente PAR, el sentido de la desigualdad cambia.

   $\forall a; b \in \mathbb{R}^-$ y n (par), se cumple:

   $a > b \Longleftrightarrow a^n < b^n$

   Ejemplos:
   - $-6 < -1 \Longleftrightarrow (-6)^2 > (-1)^2 \Longleftrightarrow 36 > 1$
   - $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{4}{9} > \frac{1}{4}$

4. Es posible multiplicar desigualdades que tengan un mismo sentido si y solo sí los componentes de estas sean números positivos; el sentido de la desigualdad resultante en este caso será la misma.

   $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow$ se cumple:

   $\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \Rightarrow ac > bd$

   Ejemplos:
   - $\begin{matrix} 9 > 2 \\ 10 > 7 \end{matrix} \Rightarrow 9 . 10 > 2 . 7 \Rightarrow 90 > 14$
   - $\begin{matrix} 5 < a < 10 \\ 1 < b < 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5 . 1 < a . b < 10 . 2 \\ 5 < ab < 20 \end{matrix}$

5. Regla de los signos de la multiplicación.

   $a . b > 0 \Longleftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$

   Ejemplos:
   1. $5 . 2 > 0 \Rightarrow 10 > 0 \Longleftrightarrow 5 > 0 \wedge 2 > 0$
   2. $(-3)(-7) > 0 \Rightarrow 21 > 0 \Longleftrightarrow -3 < 0 \wedge -7 < 0$

   $a . b < 0 \Longleftrightarrow [(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)]$

   Ejemplos:
   1. $9(-7) < 0 \Rightarrow -63 < 0 \Longleftrightarrow 9 > 0 \wedge -7 < 0$
   2. $(-8)5 < 0 \Rightarrow -40 < 0 \Longleftrightarrow -8 < 0 \wedge 5 > 0$

6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se verifican las relaciones:

   $0 < a < b \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

   Ejemplo:
   - $0 < 2 < 4 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 0 < 0,25 < 0,5$

   $a < b < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

   Ejemplo:
   - $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < 0 \Longleftrightarrow -3 < -2 < 0$



7. Si a y b tienen el mismo signo, se cumple:

$$a < x < b \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

Ejemplos:

1. $2 < c < 5 \iff \frac{1}{5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$
2. $5 < \frac{1}{a} < 7 \iff \frac{1}{7} < a < \frac{1}{5}$

OPERACIONES ENTRE INTERVALOS

Si los conjuntos A y B representan un intervalo de números reales, se realizan entre ellos las siguientes operaciones:

1. Unión: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$
2. Intersección: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
3. Diferencia: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Complemento: $A' = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \notin A\}$

Observación

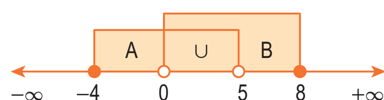
Los símbolos:
$\vee$: significa "o".
$\wedge$: significa "y".
$\notin$: no pertenece al conjunto.



Ejemplos:
Sean los conjuntos: $A = [-4; 5\rangle$; $B = \langle 0; 8]$; $C = [-1; +\infty\rangle$
Realiza las siguientes operaciones:
1. $A \cup B$ 2. $B \cap C$ 3. $A - C$ 4. B'

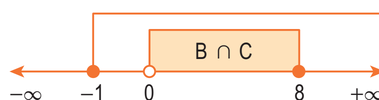
Resolución:

1. Graficamos los intervalos en la recta real:
$A = [-4; 5\rangle$; $B = \langle 0; 8]$



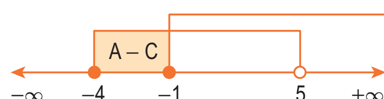
$\Rightarrow A \cup B = [-4; 5\rangle \cup \langle 0; 8] = [-4; 8]$

2. Graficamos:
$B = \langle 0; 8]$; $C = [-1; +\infty\rangle$



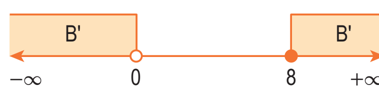
$\Rightarrow B \cap C = \langle 0; 8] \cap [-1; +\infty\rangle = \langle 0; 8]$

3. Graficamos:
$A = [-4; 5\rangle$; $C = [-1; +\infty\rangle$



$\Rightarrow A - C = [-4; 5\rangle - [-1; +\infty\rangle = [-4; -1\rangle$

4. Graficamos:
$B = \langle 0; 8]$



$\Rightarrow B' = \langle 0; 8]' = \langle -\infty, 0] \cup \langle 8; +\infty\rangle$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son aquellas que se reducen a las formas generales:

$ax + b > 0$ $ax + b < 0$ $ax + b \geq 0$ $ax + b \leq 0$; $a \neq 0$

Despejando la variable x (teniendo en cuenta las propiedades de los números reales vistas al inicio del tema):

Casos:		Si a > 0 Ley multiplicativa	∨	Si a < 0 Ley multiplicativa
I.	$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow$	$x > -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$	∨	$x < -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right\rangle$
II.	$ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow$	$x < -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right\rangle$	∨	$x > -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$
III.	$ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geq -b \Rightarrow$	$x \geq -\frac{b}{a} \iff x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$	∨	$x \leq -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right]$
IV.	$ax + b \leq 0 \Rightarrow ax \leq -b \Rightarrow$	$x \leq -\frac{b}{a} \iff x \in \left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right]$	∨	$x \geq -\frac{b}{a} \iff x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$
		Intervalos de solución		Intervalos de solución

Recuerda

- Si:
  $a \neq 0 \Rightarrow a > 0 \vee a < 0$
- **El conjunto solución (CS) de una inecuación** serán aquellos números reales que verifican la inecuación.
- Al conjunto solución se le denomina también intervalo solución.

CS < > INTERVALO SOLUCIÓN

< > Significa: "equivalente a"



Ejemplos:

1. Determina el conjunto solución de la inecuación: $6x + 3 > x - 2$

   Resolución:
   - Sumando $-x$ a cada uno de los miembros: $6x + 3 - x > x - 2 - x$
     $5x + 3 > -2$

Nota

La solución gráfica de la inecuación del ejemplo 1 es:



CS = $x \in \langle -1; +\infty \rangle$



- Sumando –3 a cada uno de los miembros: $5x + 3 - 3 > -2 - 3$
- Este es el caso I. Con a > 0: $5x > -5$
- Multiplicando por $\frac{1}{5}$ a cada miembro de la inecuación: $5x\left(\frac{1}{5}\right) > -5\left(\frac{1}{5}\right)$
- Luego, el conjunto solución será: $x > -1$

$$CS = \langle -1; +\infty \rangle$$

2. Determina el conjunto solución de la inecuación: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{6} \leq \frac{x}{6} + \frac{5}{6}$

Resolución:

- Multiplicamos a ambos miembros de la inecuación por el MCM de los denominadores (MCM(2; 3; 6) = 6): $6\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right) \leq 6\left(\frac{x}{6} + \frac{5}{6}\right)$

$$3x + 2x + 1 \leq x + 5$$

- Reduciendo términos semejantes: $5x + 1 \leq x + 5$
- Sumando –x a ambos miembros de la inecuación: $5x - x + 1 \leq x - x + 5$

$$4x + 1 \leq 5$$

- Sumando –1 a ambos miembros de la inecuación: $4x + 1 - 1 \leq 5 - 1$
- Este es el caso IV con a > 0: $4x \leq 4$

$$x \leq 1$$

- El conjunto o intervalo solución será: CS = $\langle -\infty; 1]$

Nota

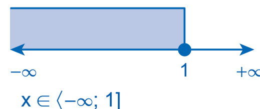
Del ejemplo 2

- El mínimo común múltiplo (MCM) de : 2; – 3; – 6; – 6 y – 6 es:

2 – 3 – 6 – 6 – 6	2
1 – 3 – 3 – 3 – 3	3
1 – 1 – 1 – 1 – 1	

MCM = 2 . 3 = 6

- La representación gráfica del conjunto solución será:



$x \in \langle -\infty; 1]$



SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Es aquella agrupación de inecuaciones cuyas soluciones verifican simultáneamente a cada inecuación. Se presenta el siguiente caso:

Sistema expresado en función de una sola incógnita

1.er Caso: $\forall a; b; c; d \in \mathbb{R}$ $\boxed{a < cx + d < b}$

Ejemplo:

Determina el conjunto solución de: $3 \leq 7 - 2x < 13$

Resolución:

La solución se hará de dos maneras:

A) Por separado:

$$3 \leq \underbrace{7 - 2x}_{} < 13$$

(I): $3 \leq 7 - 2x$; (II): $7 - 2x < 13$

El conjunto solución estará dado por:

(I) ∩ (II)

(I) $3 \leq 7 - 2x \Rightarrow 2x \leq 7 - 3$

$2x \leq 4$

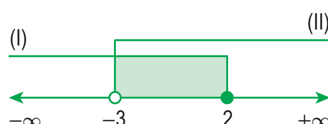
$x \leq 2$

(II) $7 - 2x < 13 \Rightarrow 7 - 13 < 2x$

$-6 < 2x$

$2x > -6$

$x > -3$



CS = $\langle -3; 2]$

B) En forma simultánea:

- Sumando –7 a cada miembro del sistema:

$3 - 7 \leq 7 - 7 - 2x < 13 - 7$

$-4 \leq -2x < 6$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ a los miembros de la inecuación:

$$-4\left(-\frac{1}{2}\right) \geq -2x\left(-\frac{1}{2}\right) > 6\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2 \geq x > -3$$

También se puede escribir como:

$-3 < x \leq 2$

CS = $\langle -3; 2]$

Recuerda

- En el sistema de inecuaciones cuando no existen soluciones comunes el sistema será imposible de resolverse.





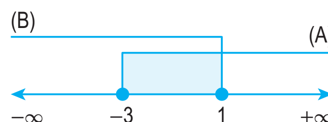
2.° Caso: $\forall a; b; c; d; e; f \in \mathbb{R}$ $\boxed{ax + b < cx + d < ex + f}$

Ejemplos:

1. Resuelve el siguiente sistema: $3x - 4 \leq 5x + 2 \leq - x + 8$

   Resolución:

   - Desarrollando la inecuación por separado, luego la solución estará dado por la intersección de (I) y (II):
     $$\underbrace{3x + 4 \leq \overbrace{5x + 2}^{}}_{(I)}\overbrace{\leq - x + 8}^{(II)}$$
   - En (I) sumando a la vez $-5x$ y 4 a ambos miembros de la inecuación:
     $$3x - 4 \leq 5x + 2$$
     $$3x - 5x - 4 + 4 \leq 5x - 5x + 2 + 4$$
     $$-2x \leq 6$$
   - Multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ a los miembros de la inecuación:
     $$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \geq 6\left(-\frac{1}{2}\right)$$
     $$x \geq -3 \qquad (A)$$
   - Sumando a la vez x y -2 a ambos miembros de la inecuación (II):
     $$5x + 2 \leq -x + 8$$
     $$5x + x + 2 - 2 \leq -x + x + 8 - 2$$
     $$6x \leq 6$$
   - Multiplicando por $\frac{1}{6}$ a los miembros de la inecuación:
     $$\left(\frac{1}{6}\right)6x \leq \left(\frac{1}{6}\right)6$$
     $$x \leq 1 \qquad (B)$$
   - Intersectando los conjuntos (A) y (B):



   - El conjunto solución estará dado por: $CS = [-3; 1]$

2. Sabiendo que $2 \leq x \leq 5$; determina el intervalo de la expresión $\frac{1}{x-1}$.

   Resolución:

   - Partimos de la condición, a partir de ella le damos forma hasta llegar a la expresión solicitada: $2 \leq x \leq 5$
   - Sumando -1 a cada miembro del sistema:
     $$2 - 1 \leq x - 1 \leq 5 - 1$$
     $$1 \leq x - 1 \leq 4$$
   - Como los extremos de la inecuación son positivos podemos invertirlos:
     $$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq 1$$
   - Por consiguiente, lo pedido pertenece al intervalo:
     $$\frac{1}{x-1} \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

Recuerda

Si se multiplica a los miembros de una inecuación por un número real negativo, el sentido de la inecuación cambia.



Recuerda

Cuando hay fracciones se tienen que eliminar los denominadores, esto se logra multiplicando a los miembros de la inecuación por el MCM de los denominadores.

Atención

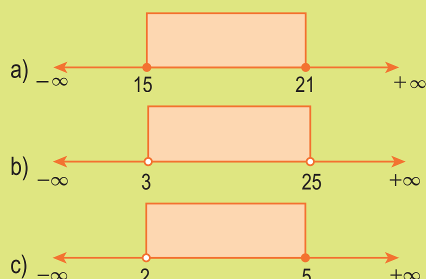
Si a y b tienen el mismo signo, se cumple:

$$\boxed{a < x < b \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}}$$



EFECTUAR

1. Interpreta con intervalos las siguientes gráficas.

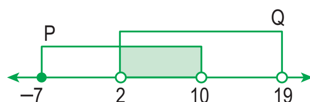


2. Grafica las siguientes desigualdades y expresiones.
   a) $-7 \leq x \leq 5$
   b) $-1 < x < 1$
   c) $2 \leq x < 13$
   d) $x \leq -7$
   e) $x \geq 2$
   f) $x \in \mathbb{R} - \{0; 1; 2\}$

Problemas resueltos

1 Si la intersección de los intervalos P y Q es:
$]a+5; b-8[$
y $P = [-7; 10[$; $Q =]2; 19[$
Calcula: a.b

Resolución:



$P \cap Q =]2; 10[=]a+5; b-8[$

$\Rightarrow a+5=2 \quad \wedge \quad b-8=10$

$a=-3 \qquad b=18$

$\therefore\ a.b=-54$

2 Encuentra el menor número natural par que verifica:
$\frac{5x-2}{3} - x > \frac{3}{5}(x+2)$

Resolución

$\frac{5x-2-3x}{3} > \frac{3x+6}{5}$

$10x-10 > 9x+18$

$x > 28 \qquad ...(1)$

Por lo tanto, el menor entero par que verifica (1) es: 30

3 Resuelve:
$\frac{x+2}{b} - \frac{x-2}{a} > \frac{5}{b} - \frac{1}{a}$
Teniendo en cuenta que: $b > a > 0$

Resolución

$\frac{ax+2a-bx+2b}{ab} > \frac{5a-b}{ab}$

$x(a-b)+2a+2b > 5a-b$

$x(a-b) > 3a-3b$

$x(a-b) > 3(a-b)$

Como $a < b \Rightarrow a-b < 0$
$\Rightarrow x < 3$
$\therefore CS = \langle -\infty; 3[$

4 Resuelve:
$7x+9 < 6x+3 < 5x+1$

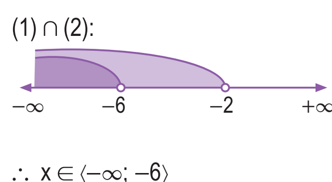
Resolución:

$\underbrace{7x+9 < 6x+3}_{(I)}$; $\overbrace{6x+3 < 5x+1}^{(II)}$

De (I):
$7x+9 < 6x+3$
$x < -6 \quad ...(1)$

De (II):
$6x+3 < 5x+1$
$x < -2 \quad ...(2)$

$(1) \cap (2)$:



$\therefore\ x \in \langle -\infty; -6\rangle$

5 Resuelve:
$(x-3)(x+4) < (x-5)(x-1)$
$(x+2)(x+1) < (x+1)(x+3)$
e indica la suma de soluciones enteras comunes.

Resolución:

$(x-3)(x+4) < (x-5)(x-1)$
$x^2+x-12 < x^2-6x+5$
$7x < 17$
$x < \frac{17}{7} \ ...(I)$

$(x+2)(x+1) < (x+1)(x+3)$
$x^2+3x+2 < x^2+4x+3$
$x > -1 \ ...(II)$

$(I) \cap (II): -1 < x < \frac{17}{7} \qquad \therefore\ x \in \langle -1; 2{,}43\rangle$

Piden, soluciones enteras: $x = \{0; 1; 2\}$
Σ soluciones enteras $= 3$

6 Si $x \in]-1; 4]$, halla el intervalo de $-4x+3$.

Resolución:

$-1 < x \leq 4 \iff 4 > -4x \geq -16$

$7 > -4x+3 \geq -13$

$-13 \leq -4x+3 < 7$

$\therefore -4x+3 \in [-13; 7[$

7 Resuelve:
$\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$

Resolución:

$\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} - \frac{5x+1}{3} > 0$

MCM(4; 10; 3) = 60

$\frac{75x-15-18x+78-100x-20}{60} > 0$

$-43x+43 > 0$

$43x < 43$

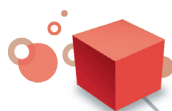
$x < \frac{43}{43}$

$x < 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty; 1\rangle$

8 Sean los conjuntos:
$A = \{x = r/s \ / \ r, s \in \mathbb{Z}$ con $1 < r < 3$ y $0 < s < 3\}$;
$B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\}$
Calcula: $A \cup B$

Resolución:

Como $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene:
$1 < r < 3 \Rightarrow r = 2$;
$0 < s < 3 \Rightarrow s = 1; s = 2$
Luego: $A = \{1; 2\}$
Además: $B = \langle 1; 2\rangle$
Unidendo: $A \cup B = [1; 2]$



UNIDAD 4

VALOR ABSOLUTO

CONCEPTO

El valor absoluto de un número real x, denotado por |x|, es un número real no negativo definido por:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

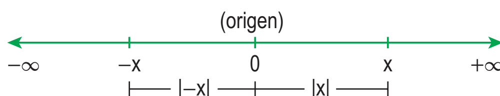
Ejemplo:

1. $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1; & x-1 \geq 0 \\ -(x-1); & x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1; & x \geq 1 \\ -x+1; & x < 1 \end{cases}$

2. $g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1; & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1; & x \geq -1 \\ -x-1; & x < -1 \end{cases}$

Interpretación geométrica del valor absoluto

El valor absoluto del número real **x** indica gráficamente la longitud del origen al número **x** o del origen al número **–x.**



Ecuaciones con valor absoluto

Deberás tener presente las siguientes dos propiedades:

$|x| = b \iff (b \geq 0) \wedge (x = b \vee x = -b)$

Ejemplos:

1. Resuelve:
   $|x-9| = 7$

   Resolución:
   Aplicando la propiedad:
   $x-9=7 \quad \vee \quad x-9=-7$
   $x=7+9 \quad \vee \quad x=-7+9$
   $x=16 \quad \vee \quad x=2$
   El conjunto solución (CS) es:
   $CS = \{2; 16\}$

2. Resuelve:
   $|x-7| = 2x-1$

   Resolución:
   Aplicando la condición:
   $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$
   Aplicando la propiedad
   $x-7=2x-1 \quad \vee \quad x-7=-(2x-1)$
   $x-2x=-1+7 \quad \vee \quad x+2x=1+7$
   $-x=6 \quad \vee \quad 3x=8$
   $x=-6 \quad \vee \quad x=\frac{8}{3}$
   Descartamos $(x=-6)$ porque no satisface la condición: $x \geq \frac{1}{2}$
   El conjunto solución es: $CS = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

$|x| = |b| \iff x = b \vee x = -b$

Ejemplos:

1. Resuelve:
   $|10x-1| = |7x+5|$

   Resolución:
   Aplicando la propiedad:
   $10x-1=-(7x+5) \quad \vee \quad 10x-1=7x+5$
   $10x-1=-7x-5 \quad \vee \quad 10x-7x=5+1$
   $10x+7x=-5+1 \quad \vee \quad 3x=6$
   $17x=-4 \quad \vee \quad 3x=6$
   $x=-\frac{4}{17} \quad \vee \quad x=2$
   El conjunto solución (CS) será:
   $CS = \left\{-\frac{4}{17}; 2\right\}$

2. Resuelve:
   $5|x| = |3x-4|$

   Resolución:
   Aplicando la propiedad:
   $5x=-(3x-4) \quad \vee \quad 5x=3x-4$
   $5x+3x=4 \quad \vee \quad 5x-3x=-4$
   $8x=4 \quad \vee \quad 2x=-4$
   $x=\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=-2$
   El conjunto solución (CS) será:
   $CS = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$

Atención

El valor absoluto de un número real cualquiera será siempre positivo o cero:
Así:

$|9| = 9$ siendo $9 > 0$
$|0| = 0$ siendo $0 = 0$
$|-9| = -(-9)$ siendo $-9 < 0$



Recuerda

Las operaciones con valor absoluto:

1. $|x| = |-x|; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|xy| = |x||y|; \forall x; y \in \mathbb{R}$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
4. $|x|^2 = x^2 = |x^2|; \forall x \in \mathbb{R}$

Asimismo considera también:

1. $|x| \geq 0 \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $x^2 \geq 0$
4. $\sqrt{x^2} = |x|; \forall x \in \mathbb{R}$
5. $2|b| = |2b|$
6. $|x-b| = |b-x|$



Problemas resueltos

1 Define: $|x - a|$; si $a \in \mathbb{R}$.

Resolución:

$$|x - a| = \begin{cases} x - a\ ;\ x - a \geq 0 \\ -(x - a)\ ;\ x - a < 0 \end{cases} \Rightarrow |x - a| = \begin{cases} x - a\ ;\ x \geq a \\ a - x\ ;\ x < a \end{cases}$$

2 Resuelve: $|x - 10| - |2x - 5| = 0$

Resolución:

Por definición tenemos:

$|x - 10| = |2x - 5|$

$x - 10 = 2x - 5 \quad \vee \quad x - 10 = -2x + 5$

$-5 = x \qquad\qquad 3x = 15$

$\qquad\qquad\qquad x = 5$

$\therefore$ CS = {–5; 5}

3 Resuelve: $\dfrac{1}{|x|} + 1 = 5$

Resolución:

Despejamos la variable en la ecuación:

$\dfrac{1}{|x|} = 5 - 1 \Rightarrow |x| = \dfrac{1}{4}$

$x = \dfrac{1}{4} \quad \vee \quad x = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore \text{CS} = \left\{-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right\}$

4 Resuelve: $|3x + 7| = |2x|$

Resolución:

$3x + 7 = 2x \quad \vee \quad 3x + 7 = -2x$

$x = -7 \qquad\qquad 5x = -7$

$\qquad\qquad\qquad x = -\dfrac{7}{5}$

$\therefore \text{CS} = \left\{-7; -\dfrac{7}{5}\right\}$

5 Resuelve: $|5x - 1| = |x + 12|$

Resolución:

$|5x - 1| = |x + 12| \Leftrightarrow (5x - 1)^2 = (x + 12)^2$

$\Rightarrow (5x - 1)^2 - (x + 12)^2 = 0$ (por diferencia de cuadrados)

$(6x + 11)(4x - 13) = 0$

$\Rightarrow x = -\dfrac{11}{6} \quad \vee \quad x = \dfrac{13}{4}$

$\therefore \text{CS} = \left\{-\dfrac{11}{6}; \dfrac{13}{4}\right\}$

6 Resuelve: $|5x - 7| = 11 - x$

Resolución:

Por definición:

$|5x - 7| = 11 - x$

$\Rightarrow 11 - x \geq 0 \quad \wedge \quad 5x - 7 = 11 - x \quad \vee \quad 5x - 7 = x - 11$

$\Rightarrow x \leq 11 \quad \wedge \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -1$

$\therefore$ CS = {–1; 3}

7 Encuentra el valor de la expresión para:

$\left|\dfrac{x \cdot y}{z}\right|$; si: $x = -4$; $y = 3$; $z = -5$

Resolución:

Reemplazando los valores, obtenemos:

$$\left|\frac{x \cdot y}{z}\right| = \left|\frac{-4.3}{-5}\right| = \left|\frac{-12}{-5}\right| = \frac{12}{5}$$

8 Siendo $x = -4$; $y = 3$; $z = -5$ determina el valor de la expresión:

$\dfrac{x \cdot |z|}{|y|}$

Resolución:

Reemplazando los valores, obtenemos:

$$\frac{x|z|}{|y|} = \frac{-4.|-5|}{|3|} = \frac{-4.5}{3} = -\frac{20}{3}$$

9 Si: $x = -4$; $y = 3$; $z = -5$, encuentra el valor de la expresión:

$\dfrac{|x|.|z|}{y}$

Resolución:

$$\frac{|x|.|z|}{y} = \frac{|-4|.|-5|}{3} = \frac{4.5}{3} = \frac{20}{3}$$

10 Si: $x = -4$; $y = 3$; $z = -5$, encuentra el valor de la expresión:

$\dfrac{|x + y|}{|2z - x|}$

Resolución:

$$\frac{|x + y|}{|2z - x|} = \frac{|-4 + 3|}{|2(-5) - (-4)|} = \frac{|-1|}{|-10 + 4|} = \frac{1}{6}$$

11 Encuentra el valor de la expresión que se da a continuación para $x = -4$, $y = 3$; $z = -5$.

$\dfrac{x - 2|y|}{3|z| - |x|}$

Resolución:

$$\frac{x - 2|y|}{3|z| - |x|} = \frac{-4 - 2|3|}{3|-5| - |-4|} = \frac{-4 - 6}{15 - 4} = -\frac{10}{11}$$

LOGARITMOS

X

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real y positivo N, en la base b, $(b > 0 \wedge b \neq 1)$ es el exponente x al cual hay que elevar la base para obtener el número N, es decir:

$$\log_b N = x \iff b^x = N$$

Se lee: logaritmo de N en base b.

Donde:
x: resultado (logaritmo)
b: base del logaritmo, $b > 0 \wedge b \neq 1$
N: número real y positivo

Ejemplo:
Determina el valor de x en la expresión:

$$\log_2(x^2 + 7x) = 3$$

Resolución:
- Aplicando la definición: $x^2 + 7x = 2^3$
- Calculamos los valores de x por el método del aspa simple:

$x^2 + 7x - 8 = 2^3$

$x \quad +8$

$x \quad -1$

- Se obtienen dos factores:

$(x + 8)(x - 1) = 0$
- Igualando cada factor a cero:

$x + 8 = 0 \ \vee \ x - 1 = 0$
- Obtenemos de esta manera las soluciones:

$x = -8 \ \vee \ x = 1$

$\therefore CS = \{-8; 1\}$

Observación

Verifica que los valores hallados hacen que N sea positivo, de lo contrario se descarta aquel valor que no cumpla con dicha condición. Así:

$N > 0$
$x^2 + 7x > 0$
$x = -8$: $(-8)^2 + 7(-8) = 8 > 0$
$x = 1$: $(1)^2 + 7(1) = 8 > 0$

En este caso se toman los dos valores, no descartamos ninguno de ellos.



IDENTIDAD FUNDAMENTAL

De la definición se desprende que: $b^{\log_b N} = N$; $N \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$

Ejemplos:
- $7^{\log_7 5} = 5$
- $37^{\log_{37} 9} = 9$
- $3{,}71^{\log_{3,71} 7} = 7$
- $b^{\mathrm{Log}_b 11} = 11$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

1. Siendo: $b > 0 \wedge b \neq 1$

$$\log_b 1 = 0 \ ; \ \log_b b = 1$$

Ejemplos:
- $\log_9 1 = 0$
- $\log_{3,71} 1 = 0$
- $\log_{9,8} 9{,}8 = 1$
- $\log_9 3^2 = 1$

2. Siendo: $A > 0 \ \wedge \ B > 0 \ \wedge \ C > 0$; $b > 0 \ \wedge \ b \neq 1$

$$\log_b ABC = \log_b A + \log_c B + \log_c C$$

Ejemplos:
- $\log_5 21 = \log_5 3 + \log_5 7$
- $\log_4 2 + \log_4 5 + \log_4 7 = \log_4 70$

3. Siendo: $A \wedge B > 0$, $b > 0 \wedge b \neq 1$

$$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$$

Ejemplos:
- $\log_3 \frac{7}{4} = \log_3 7 - \log_3 4$
- $\log_5 6 = \log_5 12 - \log_5 2$

4. **Regla del sombrero**

Siendo: $A \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{R}$

$$\log_b A^n = n\log_b A$$

Ejemplos:
- $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3\log_5 5 = 3$
- $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$

5. Siendo: $A \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$
$\forall n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+$

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A = \frac{\log_b A}{n}$$

Ejemplo:
- $\log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}\log_7 7 = \frac{1}{3}$

6. **Regla de la cadena**

A; B; C y $D \in \mathbb{R}^+ \ \wedge$ A; B; C y $D \neq 1$

$$\log_B A \,.\, \log_C B \,.\, \log_D C = \log_D A$$

Ejemplo:
- $\log_7 5 \ \log_9 7 \,.\, \log_3 9 = \log_3 5$

$$\log_A B \,.\, \log_B C \,.\, \log_C D = \log_A D$$

- $\log_3 10 \ \log_{10} 8 \,.\, \log_8 17 = \log_3 17$

7. **Cambio de base**

$N > 0$, $b \in \mathbb{R}^+$

$$\log_N b = \frac{1}{\log_b N}$$

Ejemplos:
- $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$
- $\log 9 = \frac{1}{\log_9 10}$

Nota

1. Para $n \in \mathbb{Z}^+$; $n > 1$
$\log^n_b A = (\log_b A)^n$

De aquí se desprende que:

$\log_b A^n \neq \log^n_b A$

2. En la práctica son dos los sistemas de logaritmos más utilizados: el sistema de logaritmos cuya base es **10** que fue introducido por el matemático inglés Henry Briggs y el sistema de logaritmos naturales o neperianos introducido por el matemático escocés John Neper cuya base es el número irracional **e**.
$e = 2{,}7182...$

3. Propiedad:
$\forall$ a; b; $c \in \mathbb{R}^+/b \neq 1$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Atención

El conjunto de valores admisibles (CVA) estará conformado por:

CVA: $A(x) > 0$



Observaciones

1. Cuando se emplean logaritmos cuya base es 10 se acostumbra omitir el subíndice 10.

Veamos:

- $10^0 = 1$; escribiremos: $\log 1 = 0 \Leftrightarrow \log_{10} 1 = 0$
- $10^1 = 10$; escribiremos: $\log 10 = 1 \Leftrightarrow \log_{10} 10 = 1$
- $10^2 = 100$; escribiremos: $\log 100 = 2 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$
- $10^3 = 1000$, escribiremos: $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$
- $10^4 = 10\,000$; escribiremos: $\log 10\,000 = 4 \Leftrightarrow \log_{10} 10\,000 = 4$

2. Cuando se emplean logaritmos neperianos, la notación será la siguiente:

$\ln N = \log_e N$

Veamos:

- $\ln e = \log_e e = 1$
- $\ln 8 = \log_e 8$
- $\ln 11 = \log_e 11$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Siendo: $b > 0 \wedge b \neq 1$, la ecuación: $\log_b A(x) = a$

Se resuelve por medio de las relaciones:

$$A(x) > 0 \wedge A(x) = b^a$$

Ejemplos:

1. Examen de Admisión UNI 2003–II (matemática)

Determina las soluciones reales de la ecuación: $\log_5(x^2 - 20x) = 3$

Resolución:

Aplicando la propiedad propuesta:

$x^2 - 20x > 0 \quad \wedge \quad x^2 - 20x = 5^3$

Factorizando la desigualdad:

$x(x - 20) > 0 \quad \wedge \quad x^2 - 20x - 125 = 0$

Factorizando la igualdad:

$x < 0 \vee x > 20 \quad \wedge \quad (x - 25)(x + 5) = 0$

Igualando cada factor de la igualdad a cero:

$x < 0 \vee x > 20 \quad \wedge \quad x = 25 \vee x = -5$

Como estos valores satisfacen el CVA, entonces son las soluciones reales:

$x_1 = -5$; $x_2 = 25$

2. Examen de Admisión UNI 2011–II (matemática)

Determina el valor de x en la siguiente ecuación: $\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$

Da como respuesta la suma de las soluciones.

Resolución:

Aplicamos la regla del "sombrero":

$\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$

$(\log x)(\log x) - \log x - 6 = 0$

Se forma una ecuación cuadrática:

$(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$

$\log x \quad -3$

$\log x \quad 2$

Factorizamos por el aspa simple:

$(\log x - 3)(\log x + 2) = 0$

Igualando cada factor a cero:

$\log x - 3 = 0 \quad \vee \quad \log x + 2 = 0$

Estos valores verifican la existencia del logaritmo:

$$x = 10^3 \ \vee \ x = 10^{-2}$$

Luego, la suma de soluciones es:

$10^3 + 10^{-2} = 1000 + 0{,}01 = 1000{,}01$

3. Resuelve: $\log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^3 = 24$

Resolución:

$\log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^3 = 24$

$\log_2 x + 2\log_2 x + 3\log_2 x = 24$

$6\log_2 x = 24 \Rightarrow \log_2 x = 4$

$\therefore \ x = 2^4 = 16$

4. Calcula x: $\log\left[x^{[\log_x y][\log_y z][\log_z (x-3)]}\right] = \log 5$

Resolución:

De la ecuación:

$\log\left[x^{\log_x y \log_y z \log_z (x-3)}\right] = \log 5$

$\log\left(x^{\log_x (x-3)}\right) = \log 5$

$\log(x - 3) = \log 5$

$x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$

EFECTUAR

Grupo I

1. Calcula el logaritmo de 16 en base 2.
2. Calcula $\log_{125} 5$.
3. Determina el valor de x en: $\log(x^2 - 15x) = 2$
4. Determina el valor de x en: $7^{\log_7(2x-19)} = 4 + x$
5. Resuelve: $\log 16 + \log x + \log(x - 1) = \log 15 + \log(x^2 - 4)$

Grupo II

1. Halla x: $\log_x 7 \log_7 32 = 5$
2. Resuelve: $\log_x a \,.\, \log_a b \,.\, \log_b(x^2 - 2) = \log_c c$
3. Resuelve: $\log_5 \log_4 \log_3(4x + 1) = 0$
4. Resuelve: $\log_2 x + \log_2(x - 6) = 4$
5. Resuelve e indica la menor solución de: $\log_2(x^2 + 12) - \log_2 x = 3$
6. Halla el valor de a: $\log_a 0{,}5 = 0{,}2$

Problemas resueltos

1 Resuelve: $7^{\log_7(x^4 + 2x^2 - 14)} = 1$

Resolución:

Por la identidad fundamental:

$x^4 + 2x^2 - 14 = 1 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$(x^2 + 5)(x^2 - 3) = 0$

$x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5;\ x \notin \mathbb{R}$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3;\ x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore CS = \{\pm\sqrt{3}\}$

2 Calcula x en: $\log_{(x+1)}81 = 2$

Resolución:

Por definición sabemos:

$81 = (x+1)^2$

$\Rightarrow x + 1 = \pm 9 \wedge x + 1 > 0 \wedge x + 1 \neq 1 \Rightarrow x > -1 \wedge x \neq 0$

$x + 1 = 9 \quad \vee \quad x + 1 = -9$

$x = 8 \qquad\qquad x = -10$

La única solución posible será: $x = 8$

3 Simplifica: $M = \log\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log\left(\frac{5}{9}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$

Resolución:

Aplicamos la regla del sombrero en el término central:

$M = \log\left(\frac{75}{16}\right) + \log\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} + \log\left(\frac{32}{243}\right)$

$M = \log\left(\frac{75 \,.\, 9^2 \,.\, 32}{16 \,.\, 5^2 \,.\, 243}\right)$ (Recuerda: $\log A + \log B = \log A.B$)

$M = \log\left(\frac{3 \,.\, 25 \,.\, 3^4 \,.\, 2^5}{2^4 \,.\, 25 \,.\, 3^5}\right)$

$M = \log 2$

4 Halla x en: $\log_x\left(\frac{1}{81}\right) = \log_8\left(\frac{1}{16}\right)$

Resolución:

$\log_x(3^{-4}) = \log_{2^3}(2^{-4})$

$\log_x(3^{-4}) = \frac{-4}{3}$

Sabemos que por definición se cumple:

$x^{\frac{-4}{3}} = 3^{-4}$

$x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow x = 27$

5 Halla x: $\log_{\frac{x}{9}} 3 + \log_{9x} 3 = 0$

Resolución:

$\frac{\log 3}{\log \frac{x}{9}} = -\frac{\log 3}{\log 9x} \Rightarrow \log 3 \log 9x = -\log 3 \log \frac{x}{9}$

$\log 3(\log 9 + \log x) = -\log 3(\log x - \log 9)$

$\log 9 + \log x = \log 9 - \log x$

$2\log x = 0$

$\log x = 0$

$\therefore x = 10^0 = 1$

6 Encuentra el valor de:

$A = \log_7 5^{\log_5 343} + \log_2 9^{\log_9 128} - \log_5 13^{\log_{13} 25}$

Resolución:

Por identidad fundamental:

$A = \log_7 343 + \log_2 128 - \log_5 25$

$A = \log_7 7^3 + \log_2 2^7 - \log_5 5^2$

$\therefore \quad A = 3 + 7 - 2 = 8$

7 Calcula el valor de:

$R = \log_3 5^{\log_5 81} + 9^{\log_3 5} + \log_{\sqrt{23}} \sqrt[4]{23}$

Resolución:

$R = \log_3 81 + (3^{\log_3 5})^2 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{23} \sqrt{23}$

$R = \log_3 3^4 + 5^2 + \log_{23} 23^{\frac{1}{2}}$

$R = 4 + 25 + \frac{1}{2}$

$\therefore \quad R = \frac{59}{2}$

8 Calcula el valor de: $P = 125^{\log_2 2} + 25^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}}$

Resolución:

$P = 125 + 25^{\log_{5^{-1}} 3^{-1}}$

$P = 125 + 25^{\log_5 3}$

$P = 125 + (5^{\log_5 3})^2$

$P = 125 + (3)^2 = 125 + 9$

$\therefore P = 134$

9 Calcula el valor de m en: $\log m = \log 3 - 2$

Resolución:

$\log m = \log_{10} 3 - 2\log_{10} 10$

$\log m = \log_{10} 3 - \log_{10} 100$

$\log m = \log_{10}\left(\frac{3}{100}\right)$

$\log m = \log 0{,}03$

$\therefore m = 0{,}03$

DEFINICIONES PREVIAS

Producto cartesiano A × B

Sean $A = \{2; 4; 6\}$ y $B = \{1; 3; 5\}$ dos conjuntos.

Se define $A \times B = \{(2; 1), (2; 3), (2; 5), (4; 1), (4; 3), (4; 5), (6; 1), (6; 3), (6; 5)\}$ como el conjunto de pares ordenados de A en B.

Propiedad $\boxed{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$

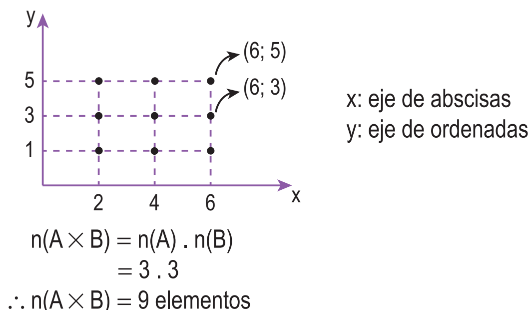
$n(A \times B)$: n.° de elementos de $A \times B$
$n(A)$: n.° de elementos del conjunto A
$n(B)$: n.° de elementos del conjunto B

Recuerda

Par ordenado:



Gráfica de un producto cartesiano:



x: eje de abscisas
y: eje de ordenadas

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
$= 3 \cdot 3$
$\therefore n(A \times B) = 9$ elementos

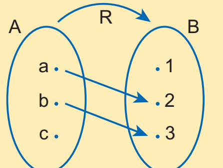
Relación

Dados 2 conjuntos no vacíos A y B; llamaremos relación o relación binaria a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$.

$\boxed{R \text{ es una relación de A en B} \iff R \subset A \times B}$

Atención

Debes saber que; en una relación R:



– Dominio de R
– Conjunto de partida

– Rango de R
– Conjunto de llegada

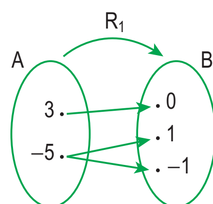
$R = \{(a; 2), (b; 3)\}$

Ejemplo:
Dados los conjuntos: $A = \{3; -5\}$ y $B = \{0; 1; -1\}$
Determina si R_1; R_2; R_3 son relaciones de A en B.

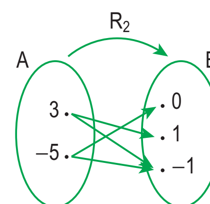
$R_1 = \{(3; 0), (-5; -1), (-5; 1)\}$
$R_2 = \{(3; 1), (3; -1), (-5; 0), (-5; -1)\}$
$R_3 = \{(3; 2), (-5; 0), (3; 1)\}$

Resolución:
$A \times B = \{(3; 0), (3; 1), (3; -1), (-5; 0), (-5; 1), (-5; -1)\}$
Se observa que:
$R_1 \subset A \times B$
$R_2 \subset A \times B$
$R_3 \not\subset A \times B$
$\therefore$ R_1 y R_2 son relaciones de A en B, R_3 no lo es.

También se puede representar a una relación en un diagrama sagital:



Donde
A: conjunto de partida
B: conjunto de llegada



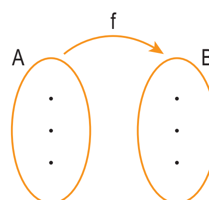


DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Se conoce como función a toda correspondencia entre 2 magnitudes.

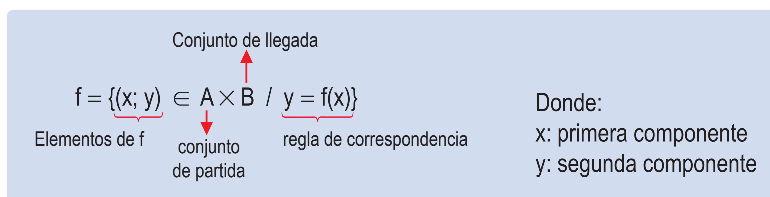
Dado un subconjunto f de $A \times B$, si a cada primera componente solo le corresponde una única segunda componente, entonces f es una función.

Notación: $f: A \Rightarrow B$ se lee: la función f de A en B.





Explícitamente:
La función de A en B se denota así:



Donde:
x: primera componente
y: segunda componente

Nota

Regla de correspondencia
Relaciona a la primera y segunda componente.
$y = f(x)$.
Donde $f(x)$ depende de los valores que toma x.

Ejemplo:
$f(x) = 3x$ (nos indica que los valores que toma **y** son el triple de los valores de **x**).
$y = 3x$

Propiedad:
f es función de A en B si:

i) $f \subset A \times B$ $\wedge$ ii) Si $(a; b) \in f$ $\wedge$ $(a; c) \in f \Rightarrow b = c$

De (ii) se infiere que a primeras componentes iguales le corresponde segundas componentes iguales.
Ejemplo:

Dados los conjuntos:

$M = \{3; 4; 6\}$, $N = \{1; 5; 8; 13\}$;

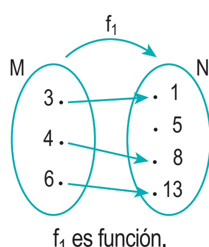
$f_1 = \{(3; 1), (4; 8), (6; 13)\}$; $f_2 = \{(1; 4), (5; 4), (8; 3), (13; 6)\}$ y $f_3 = \{(3; 8), (3; 1), (6; 13), (4; 5)\}$

¿Son f_1; f_2 y f_3 funciones de M en N?

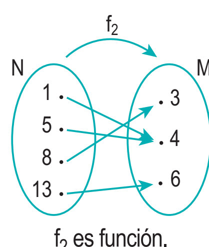
Resolución:

- Observamos que f_1 está incluido en $M \times N$ y a cada primera componente le corresponde un único valor.
  $\therefore$ f_1 es función, ya que cumple i) y ii) de la definición.
- f_2 es función de N en M, ya que está incluido en $N \times M$ y a cada primera componente le corresponde una única segunda componente.
  $\therefore$ f_2 es función de N en M, cumple i) y ii).
- f_3 no es función M en N, ya que aunque pertenezca a $M \times N$, a la primera componente 3 le corresponde distintas segundas componentes. $f_3 = \{(3; 8), (3; 1), (6; 13), (4; 5)\}$ ($8 \neq 1$)

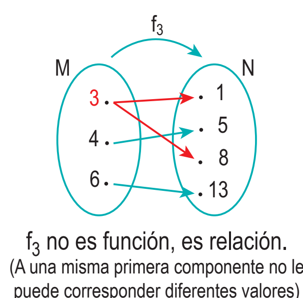
Mediante diagramas:



f_1 es función.



f_2 es función.



f_3 no es función, es relación.
(A una misma primera componente no le puede corresponder diferentes valores)

Atención

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

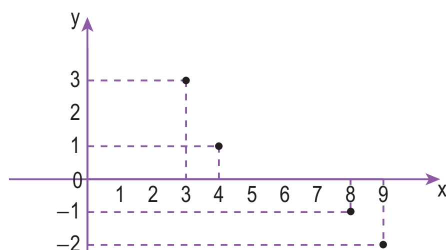
Si, $g = \{(7; 6), (3; 8), (6; 1), (m; n)\}$
$g(3) = 8$
$g(6) = 1$
$g(m) = n$
Si, $f(x) = 4x - 1$
$f(2) = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$
$f(0) = 4(0) - 1 = 0 - 1 = -1$
$f(n) = 4n - 1$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Ejemplo:
Sea $f = \{(3; 3), (4; 1), (8; -1), (9; -2)\}$ una función, realiza su gráfica:

Resolución: Ubicamos los pares ordenados en el plano cartesiano.



Donde:
$f(3) = 3$
$f(4) = 1$
$f(8) = -1$
$f(9) = -2$

Observación

$f(x) = 2x$ es equivalente a $y = 2x$ e indica que los valores de **y** son el doble que los de **x**.

Si: $x = -3 \Rightarrow y = 2x = -6$

$x = 2 \Rightarrow y = 2x = 4$



Gráfica de una función con regla de correspondencia $y = f(x)$

Sea la función $f(x) = 2x$, realiza su gráfica.

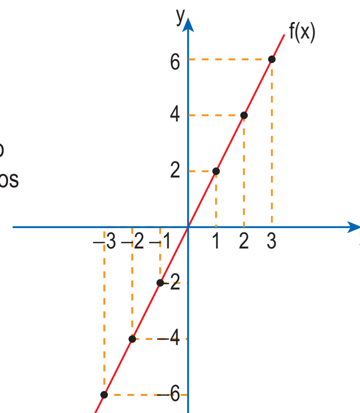
Resolución:

Elaboramos un cuadro con algunos valores de x; y evaluamos en la regla de correspondencia $f(x) = 2x$.

Tabulamos:

x	f(x) = 2x
⋮	⋮
–3	–6
–2	–4
–1	–2
0	0
1	2
2	4
3	6
⋮	⋮

⇒ Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y unimos los puntos.



Atención

Si:

$f_1 = \{(4; 2), (6; 3)\}$

$Dom(f_1) = \{4; 6\}$

$Ran(f_1) = \{2; 3\}$



DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dominio

- Sea f = {(3; 6), (7; 2), (5; 11), (9; 17)}; una función, el dominio se denota por Dom(f) o Df y representa a las **primeras componentes** de f.
  ⇒ Dom(f) = {3; 7; 5; 9}
- Sea $g(x) = x - 3$, una función en ℝ.
  El dominio son los valores que toma la variable x.
  ⇒ Dom(g) = ℝ; es decir; x toma cualquier valor real.

Rango

El rango de una función f; se denota como Ran(f) o R(f) y representa a las **segundas componentes** de f.

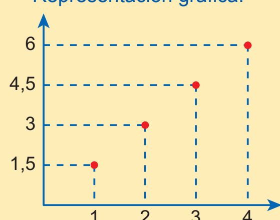
- Si; f = {(3; 6), (7, 2), (5; 11), (9; 17)} es una función:
  Ran(f) = {6; 2; 11; 17}
- Si; $g(x) = x - 3$ es una función en ℝ.
  ⇒ Ran(g) son los valores que toma $x - 3$, en este caso todos los reales Ran (g) = ℝ.

Recuerda

- Representación verbal de una función.
  El costo de un lapicero es de S/.1,5.
- Representación tabular:

Cantidad	1	2	3	4
Costo	1,5	3	4,5	6

- Representación gráfica:



Los puntos no se unen, ya que no podemos determinar el precio de 1,5 ; 2,5; ... lapiceros.

Ejemplos:

1. Sea M = {(3; 1), (1; 3), (7; 21), (5; 15)} y la función f(x) = {(x; y) ∈ M / y = 3x}, determina Dom(f) y Ran(f).

   Resolución:

   - Hallamos f(x), de acuerdo a su regla de correspondencia los valores de **y** o segunda componente son el triple de **x** o primera componente.
     M = {(3; 1), (1; 3), (7; 21), (5; 15)}
   - Observamos que {(1; 3), (7; 21), (5; 15)} cumplen con la regla correspondencia o condición.
     f(x) = {(1; 3); (7; 21); (5; 15)}
     ∴ Dom(f) = {1; 7; 5} y Ran(f) = {3; 21; 15}

2. Halla el rango de la función $f(x) = 3x - 2$; si $x \in [2; 5]$.

   Resolución:

   - Como tenemos de dato el dominio, formamos $f(x) = 3x - 2$, que son los valores que toma el rango.

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 5$$
$$6 \leq 3x \leq 15$$
$$4 \leq \underbrace{3x - 2} \leq 13$$
$$4 \leq f(x) \leq 13 \quad \therefore \; Ran(f) = [4; 13]$$



FUNCIONES ESPECIALES A ESTUDIAR

Función lineal (afin)

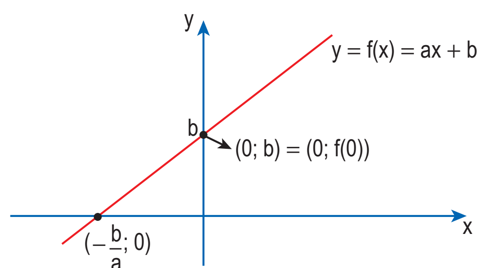
Es una función polinomial de primer grado de la forma: $f(x) = ax + b$ cuya gráfica es una recta.
Gráfica de una función lineal:

Para hallar los puntos de intersección con los ejes. Hacemos:

1.° $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ ∧ 2.° $x = 0 \Rightarrow f(x) = b$

Entonces, los puntos de intersección con los ejes son:

$\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ y $(0; b)$

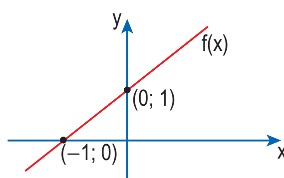


Ejemplos:

1. Grafica la función: $f(x) = x + 1$

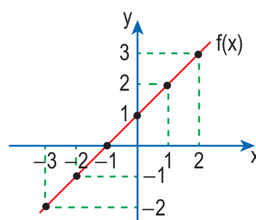
 Resolución:

- Para graficar la función debemos hallar los interceptos con los ejes:
 $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x + 1$
 $x = -1$ punto (x; f(x)): (−1; 0)
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1$ punto (x; f(x)): (0;1)



- También podemos graficar la función tabulando valores.

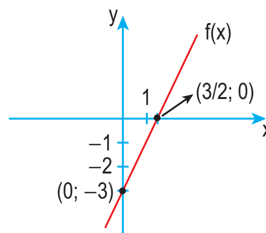
x	y = x + 1
−2	−1
−1	0
0	1
1	2
2	3
⋮	⋮



2. Grafica la función: $f(x) = 2x - 3$

 Resolución:

- Hallamos los interceptos con los ejes:
 $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0$
 $x = 3/2$ punto (x; f(x)); (3/2; 0)
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2(0) - 3$
 $f(0) = -3$ punto (x; f(x)); (0; −3)
- Ubicamos los puntos en los ejes y unimos con una recta.



Función de proporcionalidad directa

Es una función lineal cuya regla de correspondencia es $y = kx$;
Su gráfica pasa por el origen de coordenadas; es decir, (0; 0) pertenece a la función.

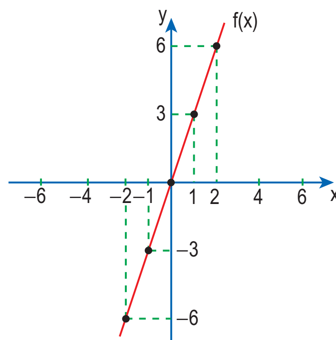
$\frac{y}{x} = k$ → Constante de proporcionalidad.
Si $k > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
Si $k < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Ejemplos:

1. $f(x) = 3x \Rightarrow y = 3x$

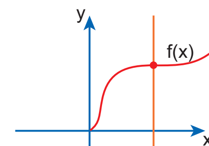
Tabulamos:

x	y
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

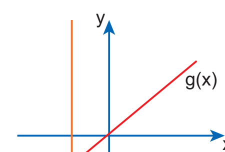


Nota

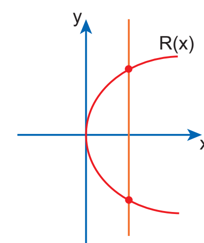
Reconocimiento gráfico de una función.
Una gráfica será función si toda recta vertical la interseca en un solo punto.



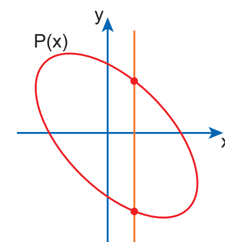
f(x) es función.



g(x) es función.



R(x) no es función.



P(x) no es función.

Observación

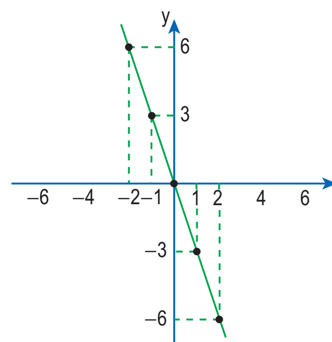
Que una recta vertical corte en un punto a una gráfica representa una función porque cumple la condición "$\forall\ x \in Dom(f), \exists!\ y" = f(x)$ (definición de función).



2. $f(x) = -3x \Rightarrow y = -3x$

Tabulamos

x	y
–2	6
–1	3
0	0
1	–3
2	–6



Recuerda

- 2 números A y B están en proporción directa si: $\frac{A}{B} = k$ (constante)

  ⇒ Si **A** aumenta; B aumenta en la misma proporción que A.

- 2 números A y B están en proporción inversa si: $A \times B = k$ (constante)

⇒ Si A aumenta; B disminuye en la misma proporción que A y viceversa.



Atención

Aplicación de una función inversa

Un automóvil va a 90 km/h y demora 3 horas en ir de una ciudad A a otra B.

¿Cuánto demorará si va a 60 km/h y a qué velocidad tendrá que ir, si quiere tardar solo 2 horas?

Resolución:

Deducimos que a mayor velocidad, menor tiempo, Entonces: es una función inversamente proporcional.

$y = \frac{k}{x}$ x: t(tiempo) y: v(velocidad)

$yx = k$

↓ ↓

v t

⇒ $90 \times 3 = k$ ... (1)

$60 \times t = k$ ... (2)

(1) ÷ (2) $t = 4,5$

Demora 4,5 horas

⇒ $90 \times 3 = k$ ... (1)

$v \times 2 = k$ ... (2)

(1) ÷ (2) $v = 135$

Deberá ir a 135 km/h

3. Arturo ahorra S/.7 cada semana, representa una función que indique cuánto tendrá en 2; 4; 6 y 10 semanas.

Resolución:

x = semanas

$f(x) = 7x$

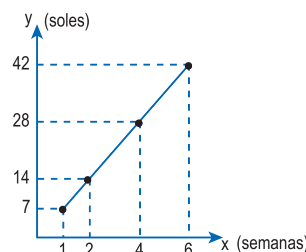
Función soles por x semanas

Tabulamos:

x = semanas	1	2	4	6	10
y = 7(x) soles	7	14	28	42	70

⇒ En x semanas tendrá S/.7x.

La gráfica de la función 7x soles por semana sería:



Función de proporcionalidad inversa

Es aquella función que tiene por regla de correspondencia:

$$f(x) = y = \frac{k}{x}$$

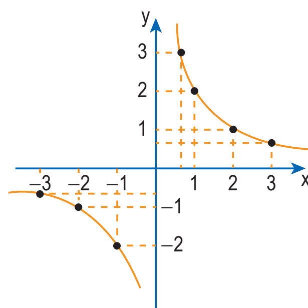
Ejemplos:

1. Realiza la gráfica de $y = \frac{2}{x}$

Resolución:

Tabulamos:

x	y
–2	–1
–1	–2
0	∄
1	2
2	1
3	2/3

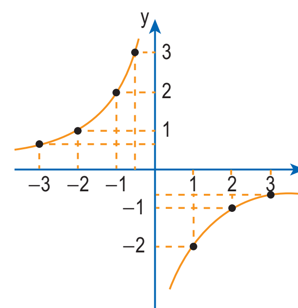


2. Realiza la grafica de $y = \frac{-2}{x}$

Resolución:

Tabulamos:

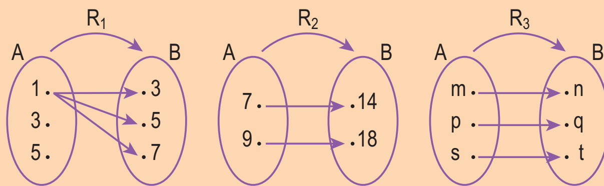
x	y
–3	2/3
–2	1
–1	2
0	∄
2	–1
3	–2/3



Se observa que si **x** aumenta **y** disminuye en la misma proporción, y viceversa.

Problemas resueltos

1 Coloca una regla de correspondencia a cada una de las imágenes de las siguientes relaciones.



Resolución:

- $R_1 = \{(1; 3), (1; 5), (1; 7)\}$
  Las imágenes de R_1 siguen una progresión aritmética de razón 2.
- $R_2 = \{(7; 14), (9; 18)\}$
  Las imágenes son el doble de las primeras componentes.
- $R_3 = \{(m; n), (p; q), (s; t)\}$
  La segunda componente es la letra consecutiva a la primera.

2 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos representa una función?
$A = \{(2; 3), (3; 3), (4; 3), (4; 5)\}$
$B = \{(2; 3), (2; 3), (2; 3), (3; 3)\}$
$C = \{(a; a^2)/ a = -1; 0; 1; 2\}$

Resolución:

El conjunto A no es función, ya que hay dos pares ordenados distintos que tienen el mismo primer elemento (4; 3) y (4; 5).
El conjunto $B = \{(2; 3), (3; 3)\}$ es una función.
El conjunto $C = \{(-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)\}$ es una función.

$\therefore$ Solo B y C son funciones.

3 Si $f = \{(3; 0), (7; 5), (7; m - 2), (5; 8)\}$ es una función, determina: $f(3) + f(m) + f(5)$

Resolución:

Si f es función, a la primera componente le corresponde una única segunda componente.

$\Rightarrow (7; 5), (7; m - 2) \in f \Rightarrow 5 = m - 2$
$m = 7$

$\Rightarrow f(3) = 0$

$\Rightarrow f(m) = f(7) = 5$

$\Rightarrow f(5) = 8$

$\therefore f(3) + f(m) + f(5) = 0 + 5 + 8 = 13$

4 Completa el recuadro y dibuja la gráfica de $f(x) = 3x + 1$

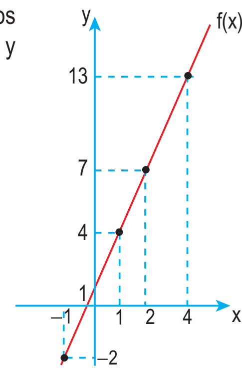
x		0	1	2	4
f(x)	–2			7	

Resolución

El valor de f(x) es el triple de x aumentado en 1.

x	–1	0	1	2	4
f(x)	–2	1	4	7	13

- Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y unimos los puntos.



5 Sea $f(x) = x - 7$ y $g(x) = 7x - 5$, dos funciones, determina $f(g(1))$.

Resolución:

Primero hallamos: $g(1) = 7(1) - 5$
$g(1) = 2$
$\Rightarrow f(g(1)) = f(2) = 2 - 7$
$= -5$
$\therefore f(g(1)) = -5$

6 Sean los conjuntos $A = \{11; 13; 16; 14\}$ y $B = \{12; 15; 18\}$ determina el dominio y rango de: $f = \{(x; y) \in A \times B / y = x + 2\}$

Resolución:

A es el conjunto de partida, entonces posee los posibles valores del Dom(f).
Veamos:

x	y = x + 2	(x; y)
11	13	(11; 13) → $\notin A \times B$
13	15	(13; 15) → $\in A \times B$
16	18	(16; 18) → $\in A \times B$
14	16	(14; 16) → $\notin A \times B$

Luego: $f = \{(13; 15), (16; 18)\}$

$\therefore Dom(f) = \{13;16\} \wedge Ran(f) = \{15; 18\}$

7 Determina el dominio y rango de la función:
$f(x) = -2x + 1$ si $x \in [-2; 2]$; luego grafica la función.

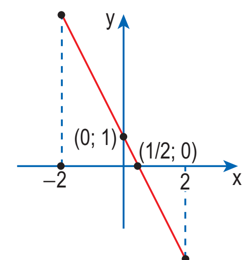
Resolución:

Dominio: $x \in [-2; 2] \Rightarrow -2 \le x \le 2$
Rango: $-2 \le x \le 2$
$-4 \le -2x \le 4$
$-3 \le -2x + 1 \le 5$

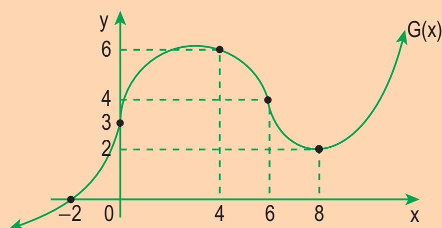
Como es una función lineal, hallamos los interceptos con los ejes.

Dato:

- Punto(0; f(0)) ⇒ en la función:
  $f(0) = -2(0) + 1 = 1$
  Punto: (0; 1)
- Punto(x; 0) ⇒ en la función:
  $0 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
  Punto: $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$



8 Sean las funciones F y G:
F = {(1; 3), (3; 2), (4; 5), (6; 1)}



Calcula:
F(1) – G(–2) + F(3) – G(0) + F(4) – G(4) + F(6) – G(6) + G(8)

Resolución:

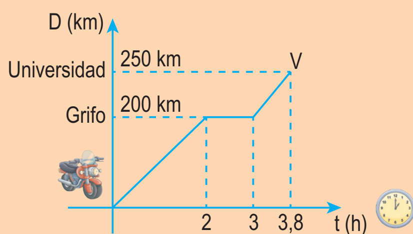
F(1) = 3; F(3) = 2; F(4) = 5; F(6) = 1

Del gráfico:

G(–2) = 0; G(0) = 3; G(4) = 6; G(6) = 4; G(8) = 2

∴ F(1) – G(–2) + F(3) – G(0) + F(4) – G(4) + F(6) – G(6) + G(8)
= 3 – 0 + 2 – 3 + 5 – 6 + 1 – 4 + 2 = 0

9 La siguiente gráfica representa a la distancia recorrida por Eder en su moto con respecto al tiempo que se demora en recorrerlo.



Responde:

I. ¿En qué tiempo hizo el recorrido de 200 km?
II. ¿Cuánto tiempo estuvo estacionado en el grifo?
III. Del grifo a la universidad qué tiempo emplea y qué distancia existe.

Resolución

I. Del gráfico: 200 km lo recorre en 2 horas.
II. De la 2.ª y 3.ª hora no recorre distancia alguna, entonces estuvo en el grifo una hora.
III. Espacio entre el grifo y la universidad 50 km y demora 0,8 h.

10 Calcula el dominio y el rango de la función:

$$f(x) = \frac{2x+7}{x+2}$$

Resolución:

Se observa que **x** no puede tomar el valor de –2, $(x \neq -2)$; luego:
Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2\}$

Para calcular el rango, despejamos x en términos de y:

$$y = \frac{2x+7}{x+2} \Rightarrow \begin{aligned} y(x+2) &= 2x+7 \\ yx + 2y &= 2x+7 \\ x(y-2) &= 7-2y \\ x &= \frac{7-2y}{y-2} \ \text{...(1)} \end{aligned}$$

Se observa de (1) que **y** no puede tomar el valor 2, $(y \neq 2)$.
Luego: Ran(f) = $\mathbb{R} - \{2\}$

11 Un jardinero demora en podar el césped de un campo 96 horas, trabajando 8 horas diarias. Completa la siguiente tabla y responde:

n.° jardineros (x)	1		6
n.° horas (y)	96	32	

a) ¿Cuántos jardineros se necesitan para terminar dicho trabajo en 32 horas?
b) ¿Cuántas horas se demorarán 6 jardineros?

Resolución:

Jardineros con horas son inversamente proporcionales:

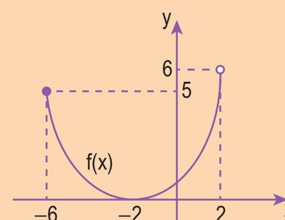
$\Rightarrow y = \frac{k}{x} \Rightarrow 96 = \frac{k}{1} \Rightarrow k = 96$ la función es $y = \frac{96}{x}$

a) y = 32 horas $\Rightarrow 32 = \frac{96}{x} \Rightarrow x = 3$ jardineros

b) x = 6 jardineros $\Rightarrow y = \frac{96}{6} \Rightarrow y = 16$ horas

x	1	3	6
y	96	32	16

12 De la gráfica, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x), así como su dominio y rango.



Resolución:

Observamos que la gráfica es decreciente en:
[–6; –2] se cumple: Si $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

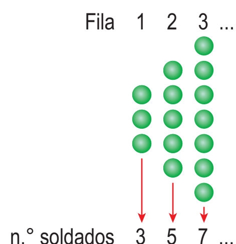
La gráfica es creciente en:
[–2; 2〉 se cumple: si: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Dom(f): [–6: 2〉 ; Ran(f): [0; 6〉

PROGRESIONES

IDEA DE PROGRESIÓN

En un cuartel el general manda a formar a su tropa de la siguiente manera: en la primera fila habrá 3 soldados en la segunda 5, en la tercera siete, es decir; van aumentando el número de soldados 2 por fila.



¿Puedes determinar el n.° de soldados que hay en la fila n.° 15?

Veamos:

Fila 1 ⇒ $3 = 3 \times 1$
Fila 2 ⇒ $5 = 3 \times 2 - 1$
Fila 3 ⇒ $7 = 3 \times 3 - 2$
Fila 4 ⇒ $9 = 3 \times 4 - 3$
⋮ ⋮
Fila n ⇒ $= 3n - (n - 1)$

} Ley de formación

$\therefore$ Fila 15 $= 3 \times 15 - 14 = 31$ soldados

Observación

1 → 3 → 9 → 27

Estos números siguen una regla:
1; 3; 9; 27
Cada número es el triple del anterior.



DEFINICIONES PREVIAS

Sucesión

Es un conjunto de términos o números ordenados y que siguen una secuencia establecida.

Ejemplo: 4; 9; 16; ... $(n + 1)^2$; ... es una sucesión, $(n + 1)^2$ es el término general.

Progresión

Es una sucesión de términos en la cual existe una ley o regla de formación.

Nota

Serie
es una sumatoria y se expresa así: Σ (sigma)
Ejemplo:

$$S = \sum_{i=1}^{30} 2i = 2 + 4 + 6 + ... + 30$$

Series notables:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = 2 + 4 + 6 + ... 2n = (n)(n + 1)$$

$$S = 1 + 3 + 5 + ... 2n - 1 = n^2$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Los términos de esta progresión aumentan o disminuyen en una cantidad constante llamada razón (r).

Ejemplo:
7; 10; 13; ... razón $(13 - 10 = 3)$; la sucesión aumenta de tres en tres.

Forma general de una progresión aritmética

$$: a_1;\ a_2,\ a_3, ...;\ a_n \equiv : a_1;\ a_1 + r;\ a_1 + 2r; ...;\ a_1 + (n - 1)r$$

(de a_1 a a_2: $+r$; de a_2 a a_3: $+r$)

Donde:
a_1: primer término
a_n: término enésimo
n: n.° de términos
r: razón aritmética

Para hallar la razón se resta el término de lugar n con su antecedente, veamos:

$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ...$

En general: $\boxed{r = a_n - a_{n-1}}$ (Diferencia de términos consecutivos)
r: razón de una PA



El término de lugar n o término enésimo de una PA(a_n)

Por inducción:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
⋮ ⋮

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

a_n → Término de lugar n; a_1 → Primer término; r → Razón

Observación

En una PA de razón r:

- Si: $r > 0$
  :4; 9; 14; ... PA creciente.
- Si: $r < 0$
  :20; 17; 14; ... PA decreciente.
- Si: $r = 0$ PA trivial.

El n.° de términos de una PA (n)

Despejamos n de $a_n = a_1 + (n - 1)r$:

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

a_n: último término

Ejemplo:

Determina la razón; el término de lugar 6 y el número de términos de: : 5; 10; 15; ...; 45.

Resolución:
Razón: $r = 15 - 10$, también $r = 10 - 5 = 5$
$T_6 = T_1 + (n - 1)r$ reemplazamos valores:
$T_6 = 5 + (6 - 1)5$
$\Rightarrow$ El término de lugar 6: $T_6 = 5 + (5)5 = 30$

El número de términos: $n = \dfrac{a_1 + a_n}{r} + 1$

$$\Rightarrow n = \frac{5 + 45}{5} + 1 = 11 \text{ términos}$$

Suma de los n primeros términos de una PA (S_n)

Sea la PA: $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$

$$Sn = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$$

a_1: primer término
a_n: último término
n: n.° de términos

Del ejemplo anterior la suma de términos es: $S_n = \left(\dfrac{5 + 45}{2}\right)11 = 275$

Atención

Cuando una PA tiene un número impar de términos:
$:a_1; a_2; ...; a_n$ n (impar)
Entonces el término central se determina así:

$$Tc = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Corolario

$$S_n = Tc \times n$$

Sea la PA: a; $\underbrace{...}_{}$; b
m medios aritméticos



PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (PG)

Es una sucesión de números en donde cada una de ellas se obtiene multiplicando su antecedente por una constante llamada razón geométrica (q).

Forma general de una PG

$$:: a_1;\ a_2;\ a_3: ...; a_n \equiv ::a_1; a_1q; a_1q^2; ...; a_1q^{n-1}$$
(×q, ×q)

Donde:
a_1: primer término.
a_n: término enésimo.
q: razón geométrica

Para hallar la razón (q) se divide uno de los términos con su antecedente.

$\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_1} = q$ En general: $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

Término de lugar general o término enésimo (a_n)

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

Donde:
a_n: término de lugar n
a_1: primer término
n: término buscado

Fórmula para determinar cualquier término, conociendo otro término, y la razón.

$$a_n = a_kq^{n-k}$$

a_k: término k ésimo

Suma de los n primeros términos de una PG

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... a_1q^{n-1}$
$S_n = a_1(\underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + ... q^{n-1}}_{\text{cociente notable}})$

$$S_n = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Producto de términos de una progresión geométrica (P_n)

Sea la PG $:: a_1; a_2; a_3; ... ; a_n$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n}$$

a_1: primer término.
a_n: último término.
n: n.° de términos.

Nota

PG creciente:
cuando ($q > 1$)
:: 4; 12; 36; ...
$q = \dfrac{12}{4} = \dfrac{36}{12} = 3$

PG decreciente:
cuando ($0 < q < 1$)
:: 81; 27, 9; ...
$q = \dfrac{27}{81} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$

PG oscilante; ($q < 0$)
:: 4; −8; 16
$q = \dfrac{-8}{4} = \dfrac{16}{-8} = -2$

Observación

El producto de dos extremos equidistantes de una PG es constante.

$a_1; a_2; a_3; ... a_{n-2}; a_{n-1}; a_n$

$\Rightarrow a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2}...$



Ejemplo:
De la siguiente PG :: 2; 4; 8; ...; 1024
calcula: a_9; S_9; P_n

Resolución:
Observamos que la PG tiene la siguiente forma:
:: $2^1; 2^2; 2^3; ...; 2^{10}$

$\Rightarrow$ n.° de términos: $n = 10; a_1 = 2; q = \frac{2^2}{2} = 2; a_n = 2^{10}$

Término noveno:
$a_9 = a_1 \times 2^{9-1}$
$a_9 = 2 \times 2^8 = 2^9 = 512$

Suma de los 9 primeros términos:

$S_9 = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 2 \times (512 - 1) = 1022$

Producto de términos: P_n
Sabemos que: $n = 10$

$\Rightarrow P_{10} = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n} = \sqrt{(2 \times 2^{10})^{10}} = (2^{11})^5 = 2^{55}$

$\therefore P_{10} = 2^{55}$

Observación

En una PG de grado impar podemos hallar el término central, veamos:

$t_1; t_2; ... t_c; ... t_n - 1; t_n$

$t_c = \sqrt{t_1 t_n}$

El término central es la raíz cuadrada del producto de los extremos.



Suma límite

Es usada solo para sumar progresiones geométricas decrecientes (razón entre 0 y 1) e ilimitadas que presentan la siguiente forma:
:: $a_1; a_2; a_3; ... \vee a_1; a_1q; a_1q^2; ...$

donde $q = \frac{1}{k} \wedge 0 < q < 1$ $\quad S_L = \frac{a_1}{1 - q}$ $\quad a_1$: primer término
q: razón geométrica

Ejemplos:

1. Calcula: $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}; ...$

   Resolución:
   Es una suma ilimitada de razón: $q = \frac{1}{4}; a_1 = 4$

   $\Rightarrow S_L = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$

2. Determina la suma: $\frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ...$

   Resolución:
   Observamos que es una PG de razón $q = \frac{1}{2}$; como $0 < q < 1$; es una suma infinita.

   Aplicamos $S_{lim.}$ donde $a^1 = \frac{2}{2^n}$; $q = \frac{1}{2}$

   $\Rightarrow S_L = \frac{\frac{2}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$

Nota

En una sucesión de números:
$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$

Media aritmética: (MA)

$MA = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

Media geométrica: (MG)

$MG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times ... \times a_n}$

EFECTUAR



I. Halla el término 10 de:
   A): 8; 11; 14; ...
   B): 4; 6; 8; ...
   C):: 6; 12; 24; ...
   D):: 7; 1; $\frac{1}{7}$; ...

II. Determina el n.° de términos de:
   A) 13; 15; 17; ...; 6
   B) 4; 8; 12; ...; 92
   C) 6; 6^2;...; 6^8
   D) 1/3; 1/9; ... ; $\frac{1}{3^{27}}$

III. Calcula:
   A) $S = 6 + 10 + 14 + ... + 54$
   B) $S = 3 + 5 + 13 + ... + 78$
   C) $S = 2 + 4 + 8 + ... + 1024$
   D) $S = 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{12}$
   E) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$
   F) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...$

Problemas resueltos

1 De las siguientes sucesiones cuáles son PA.
A) 12; 22; 32; ... C) 3m; 3(m – 1); 3(m – 2); ...
B) 3; 5/2; 2; ... D) 1; 3/2; 3; ...

Resolución:

En toda PA la razón constante, es la diferencia de 2 términos consecutivos. En cada caso tenemos:
A) 32 – 22 = 22 – 12 = 10 es PA.
B) 2 – 5/2 = 5/2 – 3 = –1/2 es PA.
C) 3(m – 2) – 3(m – 1) = 3(m – 1) – 3m = 3 es PA.
D) $3 - 3/2 \neq 3/2 - 1 \Rightarrow$ no es PA.

2 ¿Qué término de la PA es 89?
–15; –13; –11; ...

Resolución:

$r = (-13) - (-15) = 2$
$a_1 = -15$
$a_n = 89$
Para determinar n empleamos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$89 = (-15) + (n - 1)2$
De donde: n = 53
∴ El término buscado es el n.° 53.

3 El tercer término de una PA es 18 y el séptimo término es 30. Calcula a_{17}.

Resolución:

$a_3 = a_1 + 2r = 18$ ...(1)
$a_7 = a_1 + 6r = 30$ ...(2)
De (1) y (2):
$4r = 12 \Rightarrow r = 3$
De(1) $a_1 = 12$

Piden: a_{17}
$a_{17} = 12 + 16(2) = 44$

4 Determina $a_{20} \div a_{10}$, en la siguiente progresión: :: 4; 8; 16; ...

Resolución:

Es una PG: $a_1 = 4 \wedge q = 2$
$\Rightarrow a_{20} = a_1 \cdot q^{19} = 4 \cdot 2^{19} = 2^{21}$
$\Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot q^{9} = 4 \cdot 2^{9} = 2^{11}$
$\therefore a_{20} \div a_{10} = 2^{21} / 2^{11} = 2^{10} = 1024$

5 En una PG se conoce que: $a_1 = 12$; $a_n = 972$; $S_n = 1452$
Halla n.

Resolución:

$a_1 = 12$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 972 = 12 \cdot q^{n-1}$
$81 = q^{n-1} \Rightarrow 81q = q^n$ ...(1)
$S_n = a_1\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$1452 = \dfrac{12(q^n - 1)}{q - 1}$

$121(q - 1) = q^n - 1$ ...(2)
Reemplazando (1) en (2):
$121q - 121 = 81q - 1$
$40q = 120$
$q = 3$
Reemplazando q = 3 en (1):
$3^4 \cdot 3 = 3^n \Rightarrow 3^5 = 3^n$ ∴ n = 5

6 Halla el producto de términos en la siguiente PG:
:: 4; 8; ... ; 256

Resolución:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ donde: $q = 2$; $a_1 = 4$
$256 = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^6 = 2^{n-1}$
$n - 1 = 6$
$n = 7$

$\Rightarrow P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7}$
$P_7 = \sqrt{(2^2 \cdot 2^8)^7}$
$P_7 = \sqrt{2^{70}} = 2^{35}$ $\therefore P_7 = 2^{35}$

7 Halla la suma de los 8 primeros múltiplos de 4 que $\in \mathbb{N}$.

Resolución:

Los números serán: 4; 8; 12; ...
Es una PA de razón 4.
Donde: $n = 8 \Rightarrow a_8 = a_1 + (n - 1)r = 4 + (8 - 1)4 = 32$
$\Rightarrow a_8 = 32$
Reemplazamos: en $S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)n$; donde n = 8
$S_8 = \left(\dfrac{4 + 32}{2}\right)8 = 144$

8 La suma de los n términos de la PA : 2 ; 5 ; 8 ; ... es 950. ¿Cuánto vale n?

Resolución:

$a_1 = 2 \wedge r = 3$
$a_n = 2 + (n - 1)3 = 3n - 1$
$S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)n$
$950 = \left(\dfrac{2 + 3n - 1}{2}\right)n = \left(\dfrac{3n + 1}{2}\right)n$
$1900 = n(3n + 1) = 3n^2 + n$
$3n^2 + n - 1900 = 0$
3n +76
n –25
$\Rightarrow n = 25$